
FONDO PIZZOFALCONE





GEOMETRIA SOLIDA

I LIBRI UNDECIMO, E DUODECIMO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE

TRADOTTI IN ITALIANO

DALL' ABATE FAZZINI.

ED I TEOREMI SCELTI

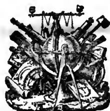
DI

ARCHIMEDE

SULLA SFERA E SUL CILINDRO; E LA MISURA DEL CERCHIO
AGGIUNTI DAL MEDESIMO.

TERZA EDIZIONE.





NAPOLI,
DALLA TIPOGRAFIA DI GENNARO AGRELLI.

1813.

N. B. *Sono contraffatte tutte le copie non munite della presente firma dell' editore.*

Gaet.° Fazzini

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE

LIBRO UNDECIMO.

DEFINIZIONI.

1. Il *solido* è quello che ha lunghezza, larghezza e profondità.

2. Il termine del solido è la superficie.

3. La linea retta è *perpendicolare* al piano, quando fa gli angoli retti con tutte le linee rette che la incontrano, e sono nel piano sottoposto.

4. Il piano è *perpendicolare* al piano, quando le linee rette che si tirano in un piano perpendicolari alla loro comune sezione, sono perpendicolari all' altro piano.

5. Se dal termine sublime di una linea retta *inclinata* al piano si tiri sopra di questo la perpendicolare, indi si congiungano i punti della perpendicolare e della inclinata posti nel piano; l' angolo acuto, che da una tal congiungente e dalla inclinata si contiene, è l' *inclinazione della linea retta al piano.*

6. L' *inclinazione* del piano ad un altro piano è l' angolo acuto, che si contiene da due linee rette

perpendicolari alla comune sezione de' piani, tirate ad un medesimo punto di essa, una in un piano e l' altra nell' altro.

7. Il piano al piano è detto *similmente inclinarsi*, che un altro ad un altro, quando gli angoli delle inclinazioni sono uguali fra loro.

8. I piani *paralleli* son quelli, che prolungati da ogni parte mai non si uniscono.

9. L' *angolo solido* è quello, che si contiene da più di due angoli piani, i quali non sono in un medesimo piano, e vanno co' loro vertici a costituirsi in un punto.

10. La decima definizione si è omessa per le ragioni che si diranno nello scolio della prop. 28.

11. Le figure solide *simili* son quelle, che hanno gli angoli solidi uguali, ciascuno a ciascuno, e son contenute da piani simili fra loro, ed uguali di numero.

12. La *piramide* è una figura solida contenuta da piani, la quale da un piano si costituisce ad un punto (1).

---

(1) Se questa definizione di Euclide, la quale per altro è elegantissima, non si creda troppo chiara per la mente de' principianti, le si potrà sostituire quest' altra « se da tutti i vertici degli angoli di un rettilineo si tirino ad un punto sublime altrettante linee rette, la figura solida contenuta dagli emergenti triangoli e dal « rettilineo sottoposto, si dirà *piramide* ».

» E secondo che un tal piano, che le serve di » base, è un triangolo, un quadrilatero ovvero un » poligono; si dirà la piramide *triangolare*, *quadrangolare* ovvero *poligona* ».

13. Il *prisma* è una figura solida contenuta da piani, de' quali due che sono opposti, sono uguali e simili e paralleli; ma gli altri sono parallelogrammi.

» E si dirà il prisma *triangolare*, *quadrangolare* ovvero *poligono*, secondo che ciascuno di » que' due piani opposti, che gli servono di base, » è un triangolo, un quadrilatero, ovvero un poligono ».

14. La *sfera* è la figura che vien descritta, allorchè un semicerchio, stando fermo il suo diametro, si aggira intorno fino a che pervenga al medesimo luogo dal quale avea cominciato a muoversi.

15. L' *asse* della sfera è la retta immobile intorno alla quale si aggira il semicerchio.

16. Il *centro* della sfera è lo stesso che quello del semicerchio.

17. Il *diametro* della sfera è ogni retta che passa per lo centro, ed è terminata da ambe le parti dalla superficie sferica.

18. Il *cono* è la figura che vien descritta, allorchè un triangolo rettangolo, stando fermo uno dei suoi cateti, si aggira intorno, fino a che pervenga al medesimo luogo dal quale avea cominciato a muoversi.

19. L' *asse* del cono è il cateto immobile intorno al quale si aggira il triangolo.

20. La *base* del cono è il cerchio descritto dal cateto che si muove intorno.

21. Il *cilindro* è la figura che vien descritta, allorchè un parallelogrammo rettangolo, stando fermo uno de' suoi lati, si aggira intorno, fino a che pervenga al medesimo luogo dal quale avea cominciato a muoversi.

22. L' *asse* del cilindro è il lato immobile intorno al quale si aggira il parallelogrammo.

23. Le *basi* del cilindro sono i cerchi descritti da' due lati opposti del parallelogrammo, i quali si muovono intorno.

24. I coni ed i cilindri *simili* sono quelli, che hanno gli assi proporzionali ai diametri delle basi.

25. Il *cubo* è una figura solida contenuta da sei quadrati uguali.

26. Il *tetraedro* è una figura solida contenuta da quattro triangoli equilateri ed uguali.

27. L' *ottaedro* è una figura solida contenuta da otto triangoli equilateri ed uguali.

28. Il *dodecaedro* è una figura solida contenuta da dodici pentagoni equilateri, equiangoli ed uguali.

29. L' *icosaedro* è una figura solida contenuta da venti triangoli equilateri ed uguali.

PROP. I. TEOR.

Non può essere di una linea retta parte in un piano, e parte in sublime.

Sia, se è possibile, della linea retta ABC (*fig.* 1.) la parte AB nel sottoposto piano, e la parte BC in sublime. Vi sarà per dritto alla AB, e continuata nel medesimo piano un' altra linea retta (*post.* 2. *I.*), la quale sia BD: in tal modo sarebbe alle linee rette ABC, ABD comune il segmento AB, lo che ripugna (*cor. prop.* 13. *I.*). Quindi non può essere di una linea retta parte in un piano, e parte in sublime. C. B. D.

PROP. II. TEOR.

Due linee rette, che scambievolmente si segano, sono in un piano; ed ogni triangolo consiste in un piano.

Le due linee rette AB, CD (*fig.* 2.) si seghino fra loro nel punto E: dico le AB, CD essere in un piano; ed ogni triangolo consistere in un piano.

Si prendano nelle BE, CE quali punti si vogliono F, G; e si congiungano CB, FG; e si tirino FK, GH. Se del triangolo EBC sia la porzione FKC ovvero GBH nel sottoposto piano,

e la rimanente in un altro; sarà anche di una delle linee rette EB, EC una parte nel sottoposto piano, ed una parte in sublime. E se del triangolo EBC la porzione FGBC sia nel sottoposto piano, e la rimanente in un altro; sarà di amendue le linee rette EB, EC una parte nel sottoposto piano ed una parte in sublime, lo che è assurdo (*prop. prec.*); adunque il triangolo EBC consiste in un piano. Ma in qual piano è il triangolo EBC, nel medesimo sono le due linee rette EB, EC; ed in qual piano sono le due EB, EC, nel medesimo sono ancora le AB, CD; quindi le due linee rette AB, CD, che scambievolmente si segano, sono in un piano; ed ogni triangolo consiste in un piano. C. B. D.

SCOLIO.

Da questo teor. ognuno può rilevare che tre punti non posti per dritto sono sempre in un piano.

Il Simson crede la seconda parte della enunciazione « *ed ogni triangolo consiste in un piano* » essersi da taluno viziata: perchè egli dice, tutte le figure definite nel I. Lib. degli Elementi sono per ipotesi figure piane, cioè descritte in un piano, e fra le altre il triangolo; e può una superficie convessa essere terminata da tre linee rette.

Nulladimeno ho voluto seguire il testo greco, al quale si sono uniformati Commandini, Gregory,

Clavio, Viviani ed altri interpreti di Euclide, per dimostrare l'inverso della definizione, cioè, che ogni triangolo consiste in un piano. Ed in vero anche nel I. Lib. degli Elementi si definì una superficie piana terminata da quattro linee rette dirsi quadrilatero; pertanto non è generalmente vero che ogni quadrilatero consiste in un piano.

PROP. III. TEOR.

Se due piani scambievolmente si seghino, la loro comune sezione è una linea retta.

I due piani AB, BC (*fig.* 3.) si seghino fra loro; e la comune sezione sia la linea DB. Dico la linea DB essere retta; perciocchè, se non sia così, si tiri dal punto B al punto D nel piano AB la linea retta BED; e nel piano BC la linea retta DFB: in tal modo le due linee rette DEB, DFB avranno i medesimi termini e conterranno spazio, lo che non può essere (*ass.* 10. *I.*); adunque la linea DB comune sezione de' piani AB, BC è retta. Quindi se due piani ec. C. B. D.

PROP. IV. TEOR.

Se una linea retta a due altre linee rette che scambievolmente si segano, sia perpendicolare, nella loro comune sezione, sarà eziandio perpendicolare al piano che passa per le dette due linee.

La linea retta EF (*fig.* 4.) sia perpendicolare alle due AB, CD nel punto E, nel quale esse scambievolmente si segano: dico essere la EF anche perpendicolare al piano che passa per le due AB, CD.

Si prendano le linee rette AE, EB, CE, ED, uguali fra loro; e per E si tiri in qualunque modo nel piano, che passa per le AB, CD, la linea retta GEH; e si congiungano le AD, CB; e da qualsivoglia punto F della retta EF si tirino le FA, FG, FD, FC, FH, FB.

E poichè le due linee rette AE, ED, sono uguali alle due linee rette BE, EC; e contengono gli angoli uguali AED, BEC (*prop.* 15. *I.*); sarà la base AD uguale alla base BC, e l'angolo DAE uguale all'angolo CBE (*prop.* 4. *I.*). Ma ancor l'angolo AEG è uguale all'angolo BEH (*prop.* 15. *I.*); sono dunque due triangoli AGE, BHE che hanno due angoli uguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato AE uguale ad un lato EB, il quale è adiacente agli angoli uguali;

quindi avranno i rimanenti lati uguali a' rimanenti lati (*prop.* 26. *I.*), cioè GE uguale ad EH, ed AG a BH. Ed essendo la AE uguale alla EB, e la FE comune e ad angoli retti, sarà la base AF uguale alla base FB; e per la medesima ragione la CF sarà uguale alla FD (*prop.* 4. *I.*). Oltre a ciò, perchè la AD è uguale alla BC, e la AF alla FB, saranno le due FA, AD uguali alle due FB, BC, ciascuna a ciascuna; ma si è dimostrata la base DF uguale alla base FG, dunque l'angolo FAD è uguale all'angolo FBC (*prop.* 8. *I.*). Or si è dimostrata la AG uguale alla BH, ed ancora la AF uguale alla FB, dunque le due FA, AG sono uguali alle due FB, BH; e l'angolo FAG si è dimostrato uguale all'angolo FBH; quindi la base GF è uguale alle base FH (*prop.* 4. *I.*). Finalmente si è dimostrata la GE uguale alla EH, e la EF comune, saranno le due GE, EF uguali alle due HE, EF; ma la base GF è uguale alla base FH, dunque l'angolo GEF è uguale all'angolo HEF; e perciò è retto ognuno degli angoli GEF, HEF, e la linea retta FE è perpendicolare alla GH (*def.* 8. *I.*) tirata comunque per E. Similmente dimostreremo essere la FE perpendicolare a tutte le linee rette, che la incontrano e sono nel piano sottoposto; il qual piano è quello che passa per le linee rette AB, CD. Ma una linea retta è perpendicolare ad un piano, quando con tutte le linee rette che la incontrano e sono nel

piano sottoposto fa gli angoli retti (*def.* 3. *XI.*): dunque la linea retta EF è perpendicolare al piano che passa per le due AB, CD. Quindi se una linea retta ec. C. B. D.

PROP. V. TEOR.

Se una linea retta a tre linee rette che scambievolmente si segano, sia perpendicolare nella loro comune sezione; quelle tre linee rette saranno in un piano.

La linea retta AB (*fig.* 5.) sia perpendicolare alle tre linee rette BC, BD, BE, nel punto B della loro comune sezione: dico le tre linee rette BC, BD, BE essere in un piano.

Se non sia così, le BD, BE siano nel sottoposto piano, e la BC in sublime; e per le AB, BC si distenda un piano che segherà il piano sottoposto in una linea retta (*prop.* 3. *XI.*), la quale sia BF. Sono adunque nello stesso piano delle AB, BC le tre linee rette AB, BC, BF. E perchè la AB è perpendicolare alle due BD, BE, le quali si segano in B, sarà ancora perpendicolare al piano che passa per le BD, BE (*prop. prec.*); e perciò è perpendicolare alla BF che la incontra, ed è in questo piano; dunque è retto l'angolo ABF. Ma l'angolo ABC si suppone retto, dunque l'angolo ABF è uguale all'angolo ABC, e sono nel medesimo piano, lo

che ripugna: non è dunque la BC in sublime, ma le tre linee rette BC, BD, BE sono in un piano. Quindi se una linea retta ec. C. B. D.

PROP. VI. TEOR.

Se due linee rette siano perpendicolari ad un medesimo piano, saranno fra loro parallele.

Le due linee rette AB, CD (*fig.* 6.) siano perpendicolari al piano sottoposto: dico essere la AB parallela alla CD.

I punti B, D, ne' quali le due linee rette AB, CD incontrano il piano sottoposto, si uniscano con la retta BD; alla quale si tiri dal punto D nel suddetto piano la perpendicolare DE; e posta DE uguale ad AB, si congiungano le BE, AE, AD.

E perchè la AB è perpendicolare al piano sottoposto, ed a tutte le linee rette, che la incontrano e sono nel medesimo piano (*def.* 3. *XI.*), sarà perpendicolare all' una e all' altra delle BE, BD; quindi è retto l' uno e l' altro degli angoli ABE, ABD. Or poichè la AB è uguale alla DE, e la BD comune, saranno le due AB, BD uguali alle due ED, BD; ma contengono angoli retti, dunque la base AD e uguale alla base BE (*prop.* 4. *I.*). Similmente perchè la AB è uguale alla DE, e la BE alla AD, le due AB, BE sono uguali alle due ED,

DA; ma la base AE è comune, dunque l'angolo ABE è uguale all'angolo EDA (*prop.* 8. *I.*); e perciò l'angolo EDA è retto al par dell'angolo ABE, e la retta ED è perpendicolare alla DA. Ma è ancora perpendicolare all'una e all'altra delle BD, DC, dunque la ED è perpendicolare alle tre linee rette BD, DA, DC, nel comune segamento; per la qual cosa le tre linee rette BD, DA, DC, sono in un piano (*prop. prec.*). Ma in qual piano sono le BD, DA in esso è la AB, perchè ogni triangolo consiste in un piano (*prop.* 2. *XI.*); dunque le BA, DC sono in un piano: e poichè l'uno e l'altro degli angoli ABD, CDB è retto, dunque la AB è parallela alla CD (*prop.* 28. *I.*), Quindi se due linee rette ec. C. B. D.

PROP. VII. TEOR.

Se due linee rette siano parallele, e si prendano in amendue quali punti si vogliano; la retta che unisce i detti punti, sarà nel medesimo piano delle parallele.

Siano due linee rette parallele le AB, CD (*fig.* 7.); ed in amendue si prendano quali punti si vogliano E, F: dico essere la linea retta che unisce i punti E, F nel medesimo piano delle parallele.

Se non sia così, si supponga la linea retta che unisce i punti E, F essere in sublime, come EGF; e nel piano ABCD in cui sono le parallele, si tiri la linea retta EHF. Siccome la linea EGF si suppone retta, allora due linee rette conterrebbero spazio, lo che non può essere. Non è dunque in sublime la retta che si conduce dal punto E all'altro F, ma bensì nel piano che passa per le parallele AB, CD. Quindi se due linee rette ec. C. B. D. (1).

PROP. VIII. TEOR.

Se due linee rette siano parallele, ed una di esse sia perpendicolare ad un piano; ancor l'altra sarà perpendicolare al medesimo piano.

Siano due linee rette parallele AB, CD *(fig. 6.)*; ed una di esse AB sia perpendicolare al piano sottoposto: dico essere l'altra CD perpendicolare al medesimo piano.

Le AB, CD incontrino il piano sottoposto ne' punti B, D; e si congiunga BD: sono adunque in un piano le AB, CD, BD. Si tiri alla

(1) N. B. Questa proposizione, che da taluni si è omessa, serve a dimostrare che ogni parallelogrammo consiste in un piano.

BD, nel sottoposto piano, la perpendicolare DE e fatta DE uguale ad AB, si congiungano le BE; AE, AD. E poichè la AB è perpendicolare al piano sottoposto, sarà eziandio perpendicolare alle linee rette che sono nel medesimo piano e la incontrano (*def.* 3. *XI.*); quindi ciascuno degli angoli ABD, ABE è retto. E cadendo la linea retta BD fra le parallele AB, CD, saranno gli angoli ABD, CDB uguali a due retti (*prop.* 29 *I.*); ma l'angolo ABD è retto, dunque benanche retto è l'angolo CDB, e la CD è perpendicolare alla BD. E perchè la AB è uguale alla DE, e la BD comune, le due AB, BD sono uguali alle due ED, DB; ma l'angolo ABD è uguale all' angolo EDB, perchè l'uno e l'altro di essi è retto, dunque la base AD è uguale alla base BE (*prop.* 4. *I.*) Similmente, perchè la AB è uguale alla DE, e la BE alla AD, saranno le due AB, BE uguali alle ED, DA; ma la base AE è comune, perciò l'angolo ABE è uguale all'angolo EDA (*prop.* 8. *I.*); quindi l'angolo EDA è retto al par dell'angolo ABE, e la ED è perpendicolare alla DA; ed è bensì perpendicolare alla BD, dunque la ED sarà perpendicolare al piano delle BD, DA (*prop* 4. *XI*,), ed a tutte le linee rette che sono nel medesimo piano, e la incontrano (*def.* 3. *XI.*). Or nel piano delle BD, DA vi è la DC, perciocchè tutte tre sono nel piano delle parallele AB, CD; dunque la ED è perpendicolare alla CD, e con

ciò la CD è perpendicolare alla ED. Ma la CD è ancora perpendicolare alla BD, dunque la CD è perpendicolare alle due linee rette BD, DE le quali scambievolmente si segano nel punto D; e perciò è perpendicolare al piano che passa per le dette BD, DE (*prop.* 4. *XI.*), che è appunto il piano sottoposto. Quindi se due linee rette ec. C. B. D.

PROP. IX. TEOR.

Le linee rette parallele ad una medesima, ancorchè non sieno con questa nello stesso piano, sono altresì parallele fra loro.

L'una e l'altra delle rette AB, CD (fig. 8.) sieno parallele alla stessa EF; e non sieno con questa nel medesimo piano. Dico la AB essere parallela alla CD.

Prendasi nella EF qualsivoglia punto G, dal quale si tiri la GH perpendicolare alla EF nel piano che passa per le AB, EF; e parimente nel piano che passa per le CD, EF, si tiri la GK perpendicolare alla stessa EF. E perchè la EF è perpendicolare all'una e all'altra delle GH, GK le quali si segano nel punto G, sarà eziandio perpendicolare al piano che passa per le GH, GK (*prop.* 4. *XI.*): ma la EF è parallela alla AB; dunque la AB è ancora perpendicolare al piano per HGK (*prop.* 8. *XI.*);

e per la medesima ragione la CD è perpendicolare al piano per HGK. Ma quando due linee rette sono perpendicolari ad un medesimo piano, sono fra loro parallele: (*prop.* 6. *XI.*) dunque la AB è parallela alla CD. C. B. D.

PROP. X. TEOR.

Se due linee rette che s'incontrano, siano parallele a due altre linee rette che parimente s'incontrano, ma non nel medesimo piano; le dette linee conterranno angoli uguali.

Le due linee rette AB, BC (*fig.* 9.) le quali s'incontrano nel punto B, siano parallele alle due DE, EF le quali s'incontrano nel punto E, ma non nel medesimo piano: dico l'angolo ABC essere uguale all'angolo DEF.

Si prendano le BA, BC, ED, EF fra loro uguali; e si congiungano le AD, CF, BE, AC, DF. E poichè la BA è uguale e parallela alla ED, sarà ancora la AD uguale e parallela alla BE (*prop.* 33. *I.*); e per la medesima ragione sarà la CF uguale e parallela alla BE. Quindi l'una e l'altra delle AD, CF è uguale e parallela alla stessa BE; ma quelle linee rette che sono parallele ad una medesima, ancorchè non sieno con questa nel medesimo piano, sono altresì parallele fra loro (*prop. prec.*); dunque la AD è parallela alla CF; ma esse so-

no uguali, e vengono congiunte dalle AC, DF, adunque la AC è uguale e parallela alla DF. Or essendo le due AB, BC uguali alle due DE, EF, e la base AC uguale alla base DF; sarà l'angolo ABC uguale all'angolo DEF (*prop.* 8. *I.*). Quindi se due linee rette ec. C. B. D.

PROP. XI. PROB.

Da un punto dato in sublime abbassare una perpendicolare al piano sottoposto.

Sia A il punto dato in sublime (*fig.* 10.), ed il piano sottoposto BH: bisogna dal punto A abbassare la perpendicolare al piano sottoposto.

Si conduca nel piano BH comunque la linea retta BC; e dal punto A si tiri sopra la BC la perpendicolare AD (*prop.* 12. *I.*). Se mai la AD sia perpendicolare al sottoposto piano, si sarà già fatto quello che si era proposto: altrimenti, si tiri dal punto D alla BC, nel piano BH, la perpendicolare DE, e dal punto A alla DE la perpendicolare AF; e finalmente si meni per F la GFH parallela alla BC.

E perchè la BC è perpendicolare alle due ED, DA le quali si segano nel punto D; sarà la BC anche perpendicolare al piano che passa per le ED, DA (*prop.* 4. *XI.*): ma alla BC è parallela la GH, e se due linee rette siano parallele, ed una di esse sia perpendicolare ad un

piano, anche l' altra è perpendicolare al medesimo piano (*prop.* 8. *XI.*); dunque la GH è perpendicolare al piano delle ED, DA; e quindi a tutte le linee rette che la incontrano, e sono nel medesimo piano (*def* 3. *XI.*). Ma la incontra la retta AF, la quale sta nel piano delle ED, DA; dunque la GH è perpendicolare alla AF, e con ciò la AF alla GH; ed è ancora la AF perpendicolare alla DE: dunque la AF è perpendicolare alle due GH, DE le quali si segano nel punto F; e perciò la AF è perpendicolare al piano delle ED, GH (*prop.* 4. *XI.*) che è il piano sottoposto. Sicchè dal punto A dato in sublime si è abbassata al piano sottoposto la perpendicolare AF. C. B. F.

PROP. XII. PROB.

Da un punto dato in un piano innalzare una linea retta perpendicolare al detto piano.

Sia dato il piano sottoposto, e 'l punto dato in esso sia A (*fig.* 11.); bisogna dal punto A innalzare una perpendicolare al sottoposto piano.

Intendasi qualche punto sublime B, dal quale si tiri al piano sottoposto la perpendicolare BC (*prop. prec.*); e per A si meni la linea retta AD parallela alla BC (*prop.* 31. *I.*). E perchè le due rette AD, CB sono parallele, ed una di esse BC è perpendicolare al sottopo-

piano; sarà ancora l'altra AD al medesimo piano perpendicolare *(prop.* 8. *XI.)*. Quindi ad un dato piano, da un punto dato in esso, si è innalzata la perpendicolare. C. D. F.

PROP. XIII. TEOR.

Da un punto dato in un piano non si possono innalzare due linee rette perpendicolari al detto piano, e dalla medesima parte; ed una è la perpendicolare, che da un punto sublime si può abbassare al piano sottoposto.

Se è possibile, si tirino dal punto A *(fig.* 12.) dato nel piano sottoposto le due linee rette AB, AC perpendicolari ad esso piano, e dalla medesima parte; e s'intenda passare per le BA, AC un piano che seghi il piano sottoposto nella retta DAE: saranno dunque in un piano le tre linee rette AB, AC, DAE. E perchè la CA è perpendicolare al piano sottoposto, sarà eziandio perpendicolare alla retta DAE, come quella che la incontra, ed è nel medesimo piano *(def.* 3. *XI.)*; quindi l'angolo CAE è retto: ma per la medesima ragione è retto l'angolo BAE, dunque l'angolo CAE è uguale all'angolo BAE, ed ambidue sono nel medesimo piano; lo che è assurdo. Per la qual cosa da un punto dato in un piano non si possono innalzare due linee rette perpendicolari al medesimo piano, e dalla medesima

parte. Ed una è la perpendicolare che da un punto sublime si può abbassare al piano sottoposto; perciocchè se fossero due, come quelle che sono perpendicolari ad un medesimo piano, sarebbero parallele fra loro (*prop.* 6. *XI.*), e tirate da un medesimo punto, lo che non può essere. C. B. D.

PROP. XIV. TEOR.

Se una linea retta sia perpendicolare à due piani, questi piani saranno paralleli.

Sia la linea retta AB (*fig.* 13) perpendicolare a' due piani CD, EF: dico i piani CD, EF essere paralleli fra loro.

Se non è così, prolungati si uniranno; uniscansi, e la loro comune sezione sia la linea retta GH; e preso nella GH qualsivoglia punto K, si congiungano le AK, BK. E poichè la AB è perpendicolare al piano EF, sarà ancora perpendicolare alla linea retta BK che sta nel piano EF prolungato (*def.* 3. *XI.*), onde l'angolo ABK è retto; e per la medesima ragione è retto l'angolo BAK. Per la qual cosa nel triangolo ABK i due angoli ABK, BAK sono uguali a due retti, lo che non può essere (*prop.* 17. I.): adunque i piani CD, EF non convengono insieme, ma bensì sono paralleli. Quindi se una linea retta ec. C. B. D.

PROP. XV. TEOR.

Se due linee rette che s' incontrano, siano parallele a due altre linee rette che parimente s' incontrano, ma non nel medesimo piano; ancora i piani, che passano per le dette linee, saranno fra loro paralleli.

Le due linee rette AB, BC (*fig.* 14) che s' incontrano nel punto B, siano parallele alle due DE, EF che s' incontrano nel punto E, e non nel medesimo piano: dico i piani che passano per ABC, DEF, essere paralleli fra loro.

Si tiri dal punto B al piano che passa per DEF la perpendicolare BG, la quale incontri il piano nel punto G; e per G si meni la GH parallela alla ED, e la GK parallela alla EF. E perchè la linea retta BG è perpendicolare al piano delle DE, EF, ed a tutte le linee rette che sono nel medesimo piano, e la incontrano (*def.* 3. *XI.*); sarà dunque la linea retta BG perpendicolare sì alla GH che alla GK, le quali sono nel detto piano: quindi è retto l' uno e l' altro degli angoli BGH, BGK. Ora essendo la BA parallela alla GH, perchè l' una e l' altra di esse è parallela alla stessa DE, con la quale non sono nel medesimo piano (*prop.* 9 *XI.*), gli angoli GBA, BGH sono uguali a due retti (*prop.* 29 *I.*): ma l' angolo

BGH è retto, dunque eziandio retto è l'angolo GBA, e perciò la GB è perpendicolare alla BA; e per la medesima ragione la GB è perpendicolare alla BC. Per la qual cosa essendo la linea retta BG perpendicolare alle due BA, BC le quali scambievolmente si segano, sarà benanche perpendicolare al piano che per le dette BA, BC si conduce (*prop.* 4. *XI.*); ma la BG si è tirata perpendicolare al piano che passa per le DE, EF: dunque la BG è perpendicolare all'uno e all'altro de' piani che passano per ABC, DEF. Ma quando una linea retta è perpendicolare a due piani, essi piani sono paralleli (*prop. prec.*); dunque il piano che passa per AB, BC è parallelo al piano che passa per DE, EF. Laonde se due rette ec. C B. D.

PROP. XVI. TEOR.

Se due piani paralleli vengano segati da qualche piano, le loro comuni sezioni saranno parallele.

I due piani paralleli AB, CD (*fig.* 15.) siano segati dal piano EFHG, e le loro comuni sezioni siano le rette EF, GH: dico la EF essere parallela alla GH.

Imperciocchè, se le linee rette EF, GH non sono parallele, prolungate si congiungeranno verso la parte FH, o verso la parte EG. Si pro-

lunghino, e congiungansi primieramente verso la parte FH nel punto K. Essendo la linea retta EFK nel piano AB, tutti i punti che si possono prendere in essa saranno nel medesimo piano; ma uno de' punti che si possono prendere nella EFK è il suddetto punto K, adunque il punto K è nel piano AB; e per la medesima ragione il punto K è nel piano CD. Quindi i piani AB, CD, che si sono supposti paralleli, prolungati si congiungerebbero, lo che è assurdo: dunque le linee rette EF, GH protratte non si congiungono verso la parte FH. Similmente dimostreremo che le linee rette EF, GH non si congiungono verso la parte EG. Ma quelle linee rette che sono in un medesimo piano, e prolungate non convengano da niuna delle parti, sono parallele (*def.* 35. *I.*), dunque la EF è parallela alla GH. Sicchè se due piani paralleli vengano segati ec. C. B. D.

PROP. XVII. TEOR.

Se due linee rette sieno segate da piani paralleli, saranno segate nella medesima ragione.

Le due linee rette AB, CD (*fig.* 16). siano segate da' piani paralleli GH, KL, MN ne' punti A, E, B, C, F, D. Dico essere AE ad EB, come CF ad FD.

Si congiungano le AC, BD, AD; e la AD

incontri il piano KL nel punto X; e si congiungano le EX, XF. E poichè i due piani paralleli KL, MN sono segati dal piano EBDX, le loro comuni sezioni EX, EB sono parallele (*pro. prec.*); e per la medesima ragione che i due piani paralleli GH, KL sono segati dal piano AXFC, le loro comuni sezioni AC, XF sono parallele (*prop. prec.*). Ora poichè ad un lato del triangolo ABD, cioè al lato BD, si è menata la parallela EX, sarà come AE ad EB, così AX ad XD (*prop.* 2. *VI*). Similmente, perchè ad un lato del triangolo ADC, cioè al lato AC, si è menata la parallela XF, sarà come AX ad XD così CF ad FD: ma si è dimostrato essere come AX ad XD così AE ad EB; dunque come AE ad EB, così CF ad FD. Sicchè se due linee rette ec. C. B. D.

PROP. XVIII. TEOR.

Se una linea retta sia perpendicolare ad un piano, tutti i piani che passano per la detta linea, saranno perpendicolari al medesimo piano.

La linea retta AB (*fig.* 17.) sia al piano sottoposto perpendicolare: dico tutti i piani, che passano per la AB, essere perpendicolari al piano sottoposto.

Si distenda per la AB il piano DE, e la co-

mune sezione di questo piano e del sottoposto sia la CE; si prenda nella CE qualsivoglia punto F, dal quale nel piano DE si tiri la FG perpendicolare alla CE. La retta AB essendo perpendicolare al sottoposto piano, sarà perpendicolare a tutte le linee rette che la incontrano, e sono nel medesimo piano (*def.* 4 *XI.*); e perciò è perpendicolare alla CE; quindi l'angolo ABF è retto. Ma ancor l'angolo GFB è retto; dunque la AB è parallela alla FG (*prop.* 28. *I.*); e perchè la AB è perpendicolare al piano sottoposto, anche la FG sarà al medesimo piano perpendicolare (*prop.* 8 *XI.*). Ma il piano è perpendicolare al piano, quando le linee rette tirate in un piano perpendicolari alla loro comune sezione, sono perpendicolari all'altro piano (*def.* 4 *XI.*); dunque il piano DE è perpendicolare al piano sottoposto; e similmente si dimostrerà ogni altro piano, che passa per AB, essere al sottoposto piano perpendicolare. Per la qual cosa se una linea retta ec. C. B. D.

PROP. XIX. TEOR.

Se due piani che scambievolmente si segano, siano ad un piano perpendicolari, anche la loro comune sezione sarà perpendicolare al medesimo piano.

I due piani AB, BC (*fig.* 18) che scambievolmente si segano, sieno perpendicolari al sottoposto piano; e la loro comune sezione sia la retta DB. Dico la DB essere perpendicolare al sottoposto piano.

Se non è così; si tiri dal punto D, nel piano AB, la linea retta ED perpendicolare alla AD, e nel piano BC la DF perpendicolare alla CD. Siccome il piano AB si suppone perpendicolare al piano sottoposto, e nel piano AB si è tirata la DE perpendicolare alla comune sezione AD, ancor la DE sarà perpendicolare al piano sottoposto (*def.* 4 *XI.*). Similmente dimostreremo essere la DF perpendicolare al piano sottoposto. Per la qual cosa dal medesimo punto, e dalla medesima parte si sarebbero innalzate ad un piano due perpendicolari, lo che non può farsi (*prop.* 13 *XI.*), dunque dal punto D non può tirarsi una linea retta perpendicolare al piano sottoposto, fuorchè la DB, comune sezione de' piani AB, BC. Sicchè se due piani ec. C. B. D.

PROP. XX. TEOR.

Se un angolo solido sia contenuto da tre angoli piani, due comunque presi sono maggiori del rimanente.

Sia l'angolo solido in A (*fig.* 19) contenuto da' tre angoli piani BAC, CAD, DAB: dico due di essi comunque presi essere maggiori del rimanente.

Se gli angoli BAC, CAD, DAB sono uguali fra loro, è manifesto due presi in qualunque modo essere maggiori del rimanente: ma se non siano uguali, l'angolo BAC non minore di qualsivoglia de'rimanenti, sia maggiore dell'angolo BAD. Si costituisca (*prop.* 23 *I.*) al punto A della linea retta AB, nel piano che passa per le BA, AC, l'angolo BAE uguale all'angolo BAD; e pongasi AE uguale ad AD, e la BEC tirata per E seghi le linee rette AB, AC ne punti B, C; e si congiungano le BD, DC. E poichè la DA è uguale alla AE, e la AB comune, le due DA, AB sono uguali alle due EA, AB: ma l'angolo DAB è uguale all'angolo BAE, dunque la base DB è uguale alla base BE (*prop.* 4. *I.*). E perchè le due BD, DC sono maggiori della CB (*prop.* 20 *I.*); e si è dimostrata la DB uguale alla BE, sarà la rimanente DC maggiore della rimanente EC. Ora essendo la DA

uguale alla AE, la AC comune, e la base DC maggiore della base EC, sarà l'angolo DAC maggiore dell'angolo EAC (*prop.* 25. *I.*); ma l'angolo DAB è per costruzione uguale all'angolo BAE, dunque gli angoli DAB, DAC sono maggiori dell'angolo BAC. È però l'angolo BAC non minore di qualsivoglia degli angoli BAD, CAD: dunque l'angolo BAC insieme con uno di essi sarà maggiore del rimanente. Sicchè se un angolo solido ec. C. B. D.

PROP. XXI. TEOR.

Ogni angolo solido è contenuto da angoli piani minori di quattro retti.

Sia primieramente l'angolo solido in A (*fig.* 20) contenuto da' tre angoli piani BAC, CAD, DAB: dico gli angoli BAC, CAD, DAB essere minori di quattro retti.

Prendansi in ciascheduna delle AB, AC, AD quali punti si vogliano B, C, D, e si congiungano le BC, CD, DB. E perchè l'angolo solido in B è contenuto da' tre angoli piani CBA, ABD, DBC, due comunque presi sono maggiori del rimanente (*prop. prec.*); adunque gli angoli CBA, ABD sono maggiori dell'angolo DBC; e per la medesima ragione gli angoli BCA, ACD sono maggiori dell'angolo DCB, e gli angoli CDA, ADB sono maggiori dell'angolo BDC. Per

la qual cosa i sei angoli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB sono maggiori de' tre angoli DBC, BCD, CDB: ma i tre angoli DBC, BCD, CDB sono uguali a due retti (*prop.* 32. *I.*); dunque i sei angoli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB sono maggiori di due retti. Ora in ciascheduno de' triangoli ABC, ACD, ADB i tre angoli sono uguali a due retti; saranno perciò de' tre suddetti triangoli i nove angoli CBA, BAC, ACB, ACD, CDA, DAC, ADB, DBA, BAD uguali a sei retti: de' quali i sei angoli ACB, ABC, ABD, ADB, ACD, ADC sono maggiori di due retti; dunque i tre rimanenti BAC, BAD, DAC, i quali contengono l'angolo solido, sono minori di quattro retti.

Ma se l'angolo solido in A (*fig.* 21.) sia contenuto da quanti si vogliano angoli piani BAC, CAD, DAE, EAF, FAB: tutti questi presi insieme saranno minori di quattro retti.

Un piano qualsivoglia incontri i piani ne'quali sono gli angoli; e le comuni sezioni di quel piano con questi siano le rette BC, CD, DE, EF, FB. E poichè l'angolo solido in B è contenuto da tre angoli piani, due comunque presi sono maggiori del rimanente (*prop. prec.*); adunque gli angoli ABC, ABF sono maggiori dell'angolo FBC; e per la medesima ragione due angoli piani a ciascheduno dei punti C, D, E, F, che sono gli angoli alle basi de' triangoli de' quali il vertice comune è il punto A, sono mag-

giori del rimanente angolo al medesimo punto, che è propriamente l'angolo del poligono BCDEF. Per la qual cosa tutti gli angoli che sono alle basi de' triangoli sono maggiori di tutti gli angoli del poligono. Ora tutti gli angoli de' triangoli insieme presi sono uguali a due volte tanti retti quanti sono i triangoli (*prop.* 32. *I.*), cioè quanti sono i lati del poligono BCDEF; e tutti gli angoli del poligono insieme con quattro retti sono ancora uguali a due volte tanti retti quanti sono i lati del poligono (*cor. prop.* 32. *I*); adunque tutti gli angoli de' triangoli sono uguali a tutti gli angoli del poligono insieme con quattro retti. Ma tutti gli angoli alle basi de' triangoli si sono dimostrati maggiori di tutti gli angoli del poligono; dunque i rimanenti angoli de' triangoli, cioè quegli angoli, onde l'angolo solido in A è contenuto, sono minori di quattro retti. Sicchè ogni angolo solido è contenuto da angoli piani minori di quattro retti ec. C. B. D.

PROP. XXII. TEOR.

Se vi sieno tre angoli piani, due de' quali presi in qualsivoglia modo sieno maggiori del rimanente, e sieno contenuti da linee rette uguali; si potrà con le linee rette che congiungono gli estremi di dette linee uguali, constituire un triangolo.

Siano i tre angoli piani (*fig.* 22.) ABC, DEF, GHK, due de' quali presi in qualsivoglia modo siano maggiori del rimanente, e siano contenuti dalle linee rette uguali AB, BC, DE, EF, GH, HK; e si congiungano le AC, DF, GK. Dico potersi da linee rette uguali alle AC, DF, GK costituire un triangolo: cioè due delle AC, DF, GK, prese in qualsivoglia modo, essere maggiori della rimanente.

Se gli angoli a' punti B, E, H sono uguali, ancora le AC, DF, GK saranno uguali (*prop.* 4. *I*), e quindi due maggiori della rimanente. Ma se gli angoli a' punti B, E, H sono disuguali, sia l'angolo al punto B non minore di qualsivoglia degli angoli a' punti E, H; non è dunque la retta AC minore di qualsivoglia delle rette DF, GK; e perciò è manifesto la AC insieme con una delle DF, GK essere maggiore della rimanente. Dico le DF, GK essere anche maggiori della AC. Si costituisca (*prop.* 23. *I.*)

alla linea retta AB ed al punto B in essa l'angolo ABL uguale all'angolo GHK, e si ponga la BL uguale ad una delle AB, BC, ED ec. e si congiungano le AL, LC. Perciocchè le due AB, BL sono uguali alle due GH, HK, l'una all'altra, e contengono gli angoli uguali, sarà la base AL uguale alla base GK (*prop.* 4. *I.*); e perchè gli angoli a' punti E, H sono maggiori dell'angolo ABC, de' quali l'angolo GHK è uguale all'angolo ABL, sarà il rimanente angolo al punto E maggiore dell'angolo LBC. Ora essendo le due LB, BC uguali alle due DE, EF, l'una all'altra, e l'angolo DEF maggiore dell'angolo LBC, sarà la base DF maggiore della base LC (*prop*. 24. *I.*). Ma si è dimostrata la GK uguale alla AL, dunque le DF, GK sono maggiori delle AL, LC: sono poi le AL, LC maggiori di AC (*prop.* 20. *I.*), dunque le DF, GK sono molto maggiori di AC. Sicchè delle linee rette AC, DF, GK due sono maggiori della rimanente, prese in qualsivoglia modo; e perciò da tre linee rette uguali alle AC, DF, GK si può costituire un triangolo C. B. D.

PROP. XXIII. PROB.

Da tre angoli piani dati, due de' quali comunque presi siano maggiori del rimanente, costituire un angolo solido: fa d' uopo però che i detti tre angoli sieno benanche minori di quattro retti.

Sieno dati i tre angoli piani (*fig.* 23.) ABC, DEF, GHK, due de' quali presi in qualsivoglia modo sono maggiori del rimanente; e sieno i detti tre angoli minori di quattro retti: bisogna da angoli uguali agli angoli ABC, DEF, GHK costituire un angolo solido.

Si taglino le AB, BC, DE, EF, GH, HK uguali fra loro; e si congiungano le AC, DF, GK. Siccome nella prop. prec. si è dimostrato, da tre rette uguali alle AC, DF, GK è possibile di costituire un triangolo; si costituisca dunque (*prop.* 22. *I.*) il triangolo LMN in modo che la AC sia uguale alla ML, la DF alla MN, e la GK alla NL; ed intorno al triangolo MNL (*prop.* 5. *IV.*) si descriva il cerchio MNL; il cui centro X, o sarà dentro del triangolo MNL, o in un lato di esso, o al di fuori: primieramente sia dentro, e si congiungano le LX, MX, NX. Dico la AB essere maggiore della LX; poichè, se non è così, o la AB sarà uguale alla LX, o minore; sia primieramente

uguale. Or essendo la AB uguale alla LX, e la AB uguale alla BC, e la LX alla MX, saranno le due AB, BC uguali alle due LX, MX, l'una all' altra: ma la base AC si suppone uguale alla base ML, dunque l' angolo ABC è uguale all'angolo LXM (*prop.* 8: *I.*); e per la medesima ragione l'angolo DEF è uguale all' angolo MXN, e l' angolo GHK all' angolo NXL. Per la qual cosa i tre angoli ABC, DEF, GHK sono uguali a' tre angoli LXM, MXN, NXL: ma i tre angoli LXM, MXN, NXL sono uguali a quattro retti (*cor. prop.* 15. *I.*); dunque eziandio i tre angoli ABC, DEF, GHK, i quali si sono supposti minori di quattro retti, sarebbero uguali a quattro retti, lo che è assurdo: non è dunque la AB uguale alla LX. Dico inoltre la AB non essere minore della LX; perchè, s' egli è possibile, sia minore; e sopra la linea retta ML, verso la parte del centro X, si costituisca il triangolo MOL, i cui lati LO, OM siano uguali alle AB, BC (*prop.* 22. *I.*); e perchè la base LM è uguale alla base AC, sarà l' angolo LOM uguale all' angolo ABC (*prop.* 8. *I.*). Ora le rette LO, OM che si sono poste uguali alle AB, BC, non possono coincidere sulle MX, XL, perchè sarebbero loro uguali, nè cadere fuori del triangolo LXM, perchè sarebbero maggiori delle dette MX, XL; dunque le rette LO, OM cadranno dentro del triangolo MXL, e sarà l' angolo LOM ossia ABC maggiore dell'angolo MXL (*prop.* 21. *I.*).

Similmente si dimostrerà essere l'angolo DEF maggiore dell' angolo MXN, e l'angolo GHK maggiore dell' angolo NXL; quindi i tre angoli ABC, DEF, GHK, che per ipotesi sono minori di quattro retti, sarebbero maggiori degli angoli LXM, MXN, NXL che sono uguali a quattro retti; lo che è assurdo; adunque la AB non è minore della LX: ma si è dimostrato nè tampoco esserle uguale, dunque la AB è maggiore della LX.

Inoltre, sia il centro del cerchio in un lato del triangolo, cioè in MN, e si congiunga XL. Dico parimente la AB essere maggiore della LX; perciocchè se non sia così, o la AB è uguale alla LX, o di questa ne è minore; e siale primieramente uguale. E poichè le due AB, BC, cioè le DE, EF sono uguali alle due MX, XL, cioè alla MN; e la MN si è posta uguale alla DF, saranno le due DE, EF uguali alla DF, lo che non può essere (*prop.* 20. *I.*): adunque la AB non è uguale alla XL; nè tampoco è minore, perchè sarebbero le due DE, EF minori della DF, lo che maggiormente è assurdo: adunque la AB è maggiore della XL.

Finalmente il centro X del cerchio sia fuori del triangolo LMN; e si congiungano le LX, MX, NX. Dico la AB eziandio essere maggiore della LX; poichè se non sia così, o è uguale, o minore; e sia primieramente uguale. Si dimostrerà come nel primo caso l'angolo ABC

uguale all' angolo LXM, e l' angolo GHK uguale all' angolo LXN; quindi tutto l' angolo MXN è uguale a' due ABC, GHK: ma gli angoli ABC GHK sono insieme maggiori dell' angolo DEF, dunque parimenti l' angolo MXN è maggiore dell' angolo DEF. Ora essendo le due DE, EF uguali alle due MX, XN, e la base DF uguale alla base MN, sarà l' angolo MXN uguale all' angolo DEF (*prop.* 8. *I.*): ma si è dimostrato maggiore, lo che è assurdo; adunque la AB non è uguale alla LX. Dico la AB neppure essere minore della LX; perciocchè se sia minore, sarà l' angolo ABC, come si è dimostrato nel primo caso, maggiore dell'angolo MXL, e l'angolo GHK maggiore dell' angolo LXN. Si costituisca alla linea retta BC ed al punto B in essa l' angolo CBP uguale all' angolo GHK; e fatta BP uguale a HK, si congiungano le CP, AP. E poichè la CB è uguale alla GH, e la BP alla KH, le due CB, BP sono uguali alle due GH, HK; ma contengono gli angoli uguali, dunque la base CP è uguale alla base GK (*prop.* 4. *I.*) ossia LN. Or ne' triangoli isosceli ABC, MXL, essendo l' angolo ABC maggiore dell' angolo MXL, sarà l' angolo alla base MLX maggiore dell' angolo alla base ACB (*prop.* 32. *I.*); e per la medesima ragione che l' angolo GHK, cioè l' angolo CBP, è maggiore dell' angolo LXN, ancor l' angolo XLN sarà maggiore dell' angolo BCP; quindi tutto l' angolo MLN è maggiore di tutto

l'angolo ACP. Ma le due ML, LN sono uguali alle due AC, CP, e l'angolo MLN è maggiore dell'angolo ACP; dunque la base MN sarà maggiore della base AP (*prop.* 24. *I.*); e perciò la DF, la quale è uguale alla MN, sarà eziandio maggiore della PA. E poichè le due DE, EF sono uguali alle due AB, BP, ciascuna a ciascuna, e la base DF maggiore della base AP, sarà l'angolo DEF maggiore dell'angolo ABP (*prop.* 25. *I.*): ed è l'angolo ABP uguale a' due ABC, CBP, ovvero agli angoli ABC, GHK; dunque l'angolo DEF è maggiore degli angoli ABC, GHK; ma per supposizione è minore, lo che è assurdo: adunque la retta AB non è minore della LX; ma si è dimostrato nè tampoco esserle uguale, dunque la AB è maggiore della LX.

Dal punto X al piano del cerchio si elevi la perpendicolare XR (*prop.* 12. *XI*); e poichè in tutti i casi si è dimostrata la AB maggiore della LX, si ponga il quadrato di XR uguale all'eccesso del quadrato di AB sopra quello di LX; e si congiungano le RL, RM, RN. E perchè la RX è perpendicolare al piano del cerchio, sarà benanche perpendicolare a ciascheduna delle LX, MX, NX (*def.* 3. *XI.*); ed essendo la LX uguale alla XM, e la XR comune e ad angoli retti, sarà la base RL uguale alla base RM; e per la medesima ragione la RN sarà uguale a ciascheduna delle RL, RM, quindi

le tre linee rette RL, RM, RN sono uguali fra loro. E perchè il quadrato di AB si è posto uguale a' quadrati di XR, e di LX; ed a' quadrati di XR e di LX è uguale il quadrato di RL (*prop.* 47. *I.*), sarà il quadrato di AB uguale al quadrato di RL; e perciò la retta AB uguale alla RL. Ma ciascuna delle BC, DE, EF, GH, HK è uguale ad AB; e l'una e l'altra delle RM, RN è uguale ad RL; adunque ciascuna delle AB, BC, DE, EF, GH, HK, è uguale a ciascuna delle RL, RM, RN. Per la qual cosa essendo le due RL, RM uguali alle due AB, BC, e la base LM uguale alla base AC; sarà l'angolo LRM uguale all'angolo ABC: e per la medesima ragione l'angolo MRN è uguale all'angolo DEF, e l'angolo NRL è uguale all'angolo GHK. Laonde da' tre angoli piani LRM, MRN, NRL rispettivamente uguali a' tre angoli dati ABC, DEF, GHK si è costituito l'angolo solido in R. C. B. F.

PROP. A. TEOR.

Se vi sieno due angoli solidi, ciascuno contenuto da tre angoli piani; e gli angoli piani dell' uno sieno rispettivamente uguali a quelli dell' altro: i piani, in cui sono gli angoli uguali, saranno fra loro similmente inclinati.

Siano due angoli solidi a' punti A, B; e l'angolo solido in A sia contenuto da' tre angoli piani CAD, CAE, EAD; e l' angolo solido in B sia contenuto da' tre angoli piani FBG, FBH, HBG, de' quali l' angolo CAD sia uguale all' angolo FBG, l' angolo CAE all' angolo FBH, e l' angolo EAD all' angolo HBG. Dico i piani ne' quali sono questi angoli uguali, essere fra loro similmente inclinati.

Si prenda nella linea retta AC qualsivoglia punto K, dal quale si tirino le KD, KL perpendicolari alla stessa AC; ma la KD nel piano CAD, e la KL nel piano CAE; sarà l' angolo DKL l' inclinazione del piano CAD al piano CAE (*def.* 6. *XI.*); e fatta nella retta BF la BM uguale alla KA, si tirino ne' piani FBG, FBH le linee rette MG, MN perpendicolari alla stessa BF; sarà l' angolo GMN l' inclinazione del piano FBG al piano FBH; si congiungano le LD, NG. E poichè nei triangoli KAD, MBG gli angoli KAD, MBG

sono uguali per ipotesi, e gli angoli AKD, BMG sono uguali come retti, ed uguali ancora sono i lati AK, BM che sono adiacenti agli angoli uguali; sarà la KD uguale alla MG, e la AD alla BG (*prop.* 26. *I*); e per la medesima ragione, ne' triangoli KAL, MBN, sarà la KL uguale alla MN, e la AL alla BN. Inoltre nei triangoli LAD, NBG, le due LA, AD si sono dimostrate uguali alle due NB, BG, ciascuna a ciascuna, e contengono angoli uguali; dunque la base LD è uguale alla base NG (*prop.* 4. *I.*). Finalmente ne' triangoli KLD, MNG, essendo le due DK, KL uguali alle due GM, MN, e la base LD uguale alla base NG; sarà l' angolo DKL uguale all' angolo GMN (*prop.* 8. *I.*). Ma l' angolo DKL è l' inclinazione del piano CAD al piano CAE, e l' angolo GMN è l' inclinazione del piano FBG al piano FBH; dunque i detti piani sono fra loro similmente inclinati (*def.* 7. *XI.*). In simil modo si dimostrerà i rimanenti piani, ne' quali sono gli angoli uguali, essere fra loro similmente inclinati. Quindi se due angoli solidi ec. C. B. D.

PROP. B. TEOR.

Se vi sieno due angoli solidi, e l' uno e l' altro sia contenuto da tre angoli piani rispettivamente uguali, e similmente posti; i detti angoli solidi saranno uguali fra loro.

Sieno gli angoli solidi a' punti A, B; e l'angolo solido in A sia contenuto da' tre angoli piani CAD, CAE, EAD; e l' angolo solido in B dagli angoli piani FBG, FBH, HBG; de' quali l' angolo CAD sia uguale all' angolo FBG, CAE ad FBH, ed EAD ad HBG. Dico l' angolo solido in A essere uguale all' angolo solido in B.

Si applichi l' angolo solido in A sull' angolo solido in B, in modo che l' angolo piano CAD resti applicato sull' altro FBG: cioè facendo cadere il punto A sul punto B, e la retta AC su la retta BF; la linea retta AD coinciderà con la retta BG, perchè l' angolo CAD si è posto uguale all' angolo FBG. Ma il piano CAE è al piano CAD similmente inclinato che il piano FBH al piano FBG (*prop. prec.*), e 'l piano CAD coincide col piano FBG; dunque eziandio il piano CAE coinciderà col piano FBH; per la qual cosa essendo l' angolo CAE uguale all' angolo FBH, la linea retta AE coinciderà con la BH; e si è dimostrata la retta AD coincidere con la BG, dunque il piano EAD coincide col piano

HBG. Sicchè l' angolo solido in A combacia coll' angolo solido in B ; e saranno fra loro uguali (*ass.* 8. *I.*). C. B. D.

PROP. C. TEOR.

Le figure solide, contenute da piani simili e similmente posti ed uguali di numero e grandezza, e delle quali niun angolo solido è contenuto da più di tre angoli piani, sono fra loro uguali e simili.

Sieno AG , KQ due figure solide contenute da piani simili , similmente posti , ed uguali di numero e grandezza : cioè sia il piano AC uguale e simile al piano KM ; il piano AF all' altro KP; BG ad LQ , GD a QN , DE ad NO ; e finalmente FH uguale e simile a PR. Dico la figura solida AG essere uguale e simile all' altra KQ.

E poichè l' angolo solido in A è contenuto da' tre angoli piani BAD , BAE , EAD , i quali per ipotesi sono rispettivamente uguali agli angoli piani LKN , LKO , OKN da' quali è contenuto l'angolo solido in K ; sarà l'angolo solido in A uguale all'angolo solido in K (*prop. prec.*). Similmente gli altri angoli solidi delle figure si dimostreranno uguali fra loro. Si applichi la figura solida AG su la figura solida KQ , in modo che la figura piana AC resti applicata su la figura piana KM , posta cioè la linea retta

AB sull' altra KL ; combacerà la figura AC con la figura KM , essendo fra loro uguali e simili; adunque le rette AD , DC , CB combaceranno rispettivamente con le rette KN , NM , ML ; ed i punti A , D , C , B coincideranno co' punti H , N , M , L ; e l' angolo solido in A combacerà coll' angolo solido in K (*prop. prec.*); per la qual cosa anche il piano AF coinciderà col piano KP , e la figura AF con la figura KP , perchè desse sono uguali e simili : adunque le rette AE , EF , FB coincideranno con le rette KO , OP , PL ; e i punti E , F co' punti O , P. Similmente si dimostrerà la figura AH coincidere coll' altra KR , la retta DH con la retta NR , e 'l punto H col punto R. E perchè l' angolo solido in B è uguale all' angolo solido in L , si dimostrerà della medesima maniera la figura BG coincidere con la figura LQ , e la retta CG con la retta MQ , e 'l punto G col punto Q. Laonde i piani , ed i lati tutti della figura solida AG combaciano co' piani ; ed i lati della figura solida KQ ; sarà dunque AG uguale e simile a KQ. E similmente qualunque altre figure solide che son contenute da piani simili , uguali di numero e di grandezza , e similmente disposti , e delle quali niun angolo solido sia contenuto da più di tre angoli piani , si dimostreranno uguali e simili fra loro. C. B. D.

SCOLIO.

Roberto Simson aggiunse all' undecimo libro degli elementi le tre ultime proposizioni, che io qui ho recate; e che servono a completare la teorica degli angoli solidi, e delle figure solide simili ed uguali. La qual teorica si trova sommamente viziata nel testo greco, e presso gl'interpetri di Euclide.

Eglino assumevano come uguali gli angoli solidi, che da angoli piani uguali son contenuti: *perspicuum est*, dice Clavio alla definizione 11 di questo libro, *angulos solidos, qui angulis planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur sibi mutuo aequales esse, nam congruent si se se penetrare intelligantur*; lo che non dovea asserirsi senza la dimostrazione: nè generalmente è vero essere uguali fra loro gli angoli solidi, che da angoli piani uguali son contenuti; perciocchè il prelodato Simson ha fatto conoscere che da quattro angoli piani dati si può costituire una moltitudine di angoli solidi ineguali; e che trattandosi di angoli solidi contenuti da tre angoli piani, si richiede, per la uguaglianza di quelli, non solo che i detti angoli piani sieno rispettivamente uguali, ma che sieno ancora similmente disposti.

Andrea Tacquet nel suo Euclide definì gli angoli solidi uguali esser quelli, che posti l'uno

dentro dell' altro combaciano ; definizione impropria , se ve ne fu giammai , perchè è un assioma che tutte le grandezze che combaciano, sono uguali fra loro ; definizione inutile , perchè non ci fa conoscere quando gli angoli solidi combaciano, ed in conseguenza quando sono uguali fra loro.

Inoltre , gl' interpreti di Euclide , definendo le figure solide simili esser quelle che son contenute da piani simili ed uguali di numero, non faceano menzione alcuna degli angoli solidi; i quali debbono essere uguali nelle dette figure, altrimenti non vi è l' idea della somiglianza. Per la qual cosa , su le vedute del geometra inglese , ho definito le figure solide simili esser quelle che hanno gli angoli solidi uguali, ciascuno a ciascuno , e son contenute da piani simili ed uguali di numero : e con ciò la somiglianza delle figure solide non è differente da quella delle figure piane, la quale si definisce dalla uguaglianza degli angoli , e dalla proporzionalità de' lati intorno agli angoli uguali.

La condizione degli angoli solidi uguali , per la somiglianza delle figure solide , è così necessaria, che faremo vedere nello scolio della proposizione 28 esservi certe figure solide contenute da piani simili, ed uguali di numero non che di grandezza, le quali pertanto non sono nè simili , nè uguali. E nello scolio della citata proposizione si farà parimente conoscere l'oggetto della proposizione C quivi aggiunta.

PROP. XXIV. TEOR.

Se un solido sia contenuto da sei piani paralleli, i piani di esso opposti saranno parallelogrammi simili ed uguali.

Sia il solido CDGH (*fig.* 24.) contenuto da'piani paralleli AC, GF; BG, CE; FB, AE. Dico i piani di esso opposti essere parallelogrammi simili ed uguali.

E poichè i due piani paralleli BG, CE sono segati dal piano AC, le loro comuni sezioni saranno parallele (*prop.* 16 *XI.*); adunque la AB è parallela alla CD. Similmente, essendo i due piani paralleli BF, AE segati dal piano AC, le loro comuni sezioni saranno parallele; quindi la AD è parallela alla BC: ma si è dimostrata la AB parallela alla CD, dunque AC è parallelogrammo. Similmente dimostreremo ciascuno de'piani CE, FG, GB, BF, AE essere parallelogrammo. Si congiungano le AH, DF; e perchè la AB è parallela alla DC, e la BH alla CF, saranno le due linee rette AB, BH che s'incontrano nel punto B, parallele alle due DC, CF che s'incontrano nel punto C, ma non nel medesimo piano; quindi le dette linee conterranno angoli uguali (*prop.* 10. *XI.*), cioè l'angolo ABH è uguale all'angolo DCF. Ora essendo le due AB, BH uguali alle due DC, CF, e l'angolo ABH uguale

all'angolo DCF; sarà la base AH uguale alla base DF, e'l triangolo ABH uguale al triangolo DCF (*prop.* 4. *I.*). Ma del triangolo ABH è doppio il parallelogrammo BG, e del triangolo DCF è doppio il parallelogrammo CE (*prop.* 34. *I.*); adunque il parallelogrammo BG è uguale e simile al parallelogrammo CE. In simil modo si dimostrerà il parallelogrammo AC uguale e simile al parallelogrammo GF, e'l parallelogrammo AE al parallelogrammo BF. Laonde se un solido sia contenuto ec. C. B. D.

N. B. La figura solida contenuta da sei piani, de'quali ciascuno è parallelo al suo opposto, si chiama *parallelepipedo*.

Ed è chiaro dalla proposizione che i sei piani, da'quali è terminato il parallelepipedo, sono parallelogrammi.

PROP. XXV. TEOR.

Se un solido parallelepipedo sia segato da un piano parallelo a' piani opposti, sarà come la base alla base, così il solido al solido.

Il solido parallelepipedo ABCD (*fig.* 25.) sia segato dal piano EU parallelo a'piani opposti AR, HD: dico come la base AEFY alla base EHCF, così essere il solido ABFU al solido EGCD.

Si prolunghi la AH dall'una e dall'altra parte; e si pongano alla EH quante rette si vogliano

uguali HM, MN, e parimente alla EA quante rette si vogliano uguali AK, KL; e si compiscano i parallelogrammi LO, KY, HQ, MS; ed i solidi LP, KR, HV, MT. E poichè le linee rette LK, KA, AE sono uguali fra loro, saranno fra loro uguali i parallelogrammi LO, KY, AF (*prop.* 36. *I.*); come ancora i parallelogrammi KX, KB, AG; e finalmente saranno uguali fra loro i parallelogrammi LZ, KP, AR, perchè sono opposti (*prop.* 24. *XI.*): adunque tre piani del solido LP sono simili ed uguali a tre piani del solido KR, e del solido AU; ma tre piani a tre opposti sono rispettivamente simili ed uguali (*prop.* 24. *XI.*), e niuno degli angoli solidi è contenuto da più di tre angoli piani; adunque i tre solidi LP, KR, AU sono uguali fra loro (*prop.* *C.* *XI.*). Con simile ragionamento si dimostrerà i tre solidi ED, HV, MT essere fra loro uguali. Per la qual cosa, quanto la base LF è moltiplice della base AF, tanto il solido LU è moltiplice del solido AU; e similmente quanto la base NF è moltiplice della base HF, tanto il solido NU è moltiplice del solido ED: ma se la base LF sia uguale alla base NF, anche il solido LU sarà uguale al solido NU (*prop.* *C.* *XI.*); e se la base LF sia maggiore della base NF, il solido LU sarà maggiore del solido NU; e se sia minore, sarà minore. Son dunque quattro grandezze, vale a dire due basi AF, FH, e due solidi AU, ED; e si son presi qualunque equimultiplici della base AF e del solido

AU, cioè la base LF ed il solido LU; ed altri qualunque equimultiplici della base FH e del solido ED, cioè la base FN ed il solido NU; e si è dimostrato il solido LU superare il solido NU, se la base LF superi la base FN; uguale, se è uguale; e minore, se minore: adunque come la base AF è alla base FH, così il solido AU è al solido ED. Sicchè se un solido ec. C. B. D.

PROP. XXVI PROB.

Ad una data linea retta, ed ad un punto dato in essa, costituire un angolo solido uguale ad un angolo solido dato, il quale sia contenuto da tre angoli piani.

Sia la data linea retta AB (*fig.* 26.), il punto dato in essa, A, e l'angolo solido dato in D, che è contenuto dagli angoli piani EDC, EDF, FDC: bisogna alla data linea retta AB, ed al punto A dato in essa costituire un angolo solido uguale al dato angolo solido in D.

Si prenda nella linea retta DF qualsivoglia punto F, dal quale si abbassi la FG perpendicolare al piano, che passa per le DE, DC (*prop.* 11 *XI.*); ed incontri il piano nel punto G; si congiunga la DG; ed alla linea retta AB, ed al punto A dato in essa, si costituisca l'angolo BAL uguale all'angolo EDC, e l'angolo BAK uguale all'angolo EDG (*prop.* 23. *I.*): indi si ponga la AK uguale alla

DG, e dal punto K si elevi al piano BAL la perpendicolare KH (*prop.* 12. *XI.*), la quale si faccia uguale alla GF; e si congiunga la HA. Dico l'angolo solido in A, che è contenuto dagli angoli piani BAL, BAH, HAL essere uguale all'angolo solido in D, contenuto dagli angoli piani EDC, EDF, FDC.

Prendansi uguali le linee rette AB, DE; e congiungansi le HB, KB, FE, GE. E poichè la FG è perpendicolare al piano sottoposto, sarà anche perpendicolare a tutte le linee rette che la incontrano, e sono nel medesimo piano (*def.* 3. *XI.*); quindi l'uno e l'altro degli angoli FGD, FGE è retto: e per la medesima ragione è retto l'uno e l'altro degli angoli HKA, HKB. E perchè le due KA, AB sono uguali alle due GD, DE, l'una all'altra, e contengono angoli uguali; sarà la base BK uguale alla base EG (*prop.* 4. *I.*); ma la KH è uguale alla GF, e contengono angoli retti, adunque la HB è uguale alla FE. Similmente, perchè le due AK, KH sono uguali alle due DG, GF, e contengono angoli retti; sarà la base AH uguale alla base DF; ed è la AB uguale alla DE, adunque le due HA, AB sono uguali alla due FD, DE, e la base HB è uguale alla base FE, sarà perciò l'angolo BAH uguale all'angolo EDF (*prop.* 8. *I.*). Per la medesima ragione l'angolo HAL è uguale all'angolo FDC: conciossiachè se prendiamo uguali le AL, DC, ed uniamo le KL, HL, GC, FC; sarà in primo luogo l'angolo KAL

uguale all' angolo GDC, perchè tutto l' angolo BAL è uguale a tutto l' angolo EDC, e la parte BAK si pone uguale alla parte EDG; inoltre, sono le due KA, AL uguali alle due GD, DC, e contengono angoli uguali; dunque la base KL sarà uguale alla base GC (*prop.* 4. *I.*): è poi KH uguale a GF, dunque le due LK, KH sono uguali alle due CG, GF, e contengono gli angoli retti, quindi la base HL è uguale alla base FG. Similmente, perchè le due HA, AL sono uguali alle due FD, DC, e la base HL è uguale alla base FC; sarà l' angolo HAL uguale all' angolo FDC (*prop.* 8. *I.*). Laonde i tre angoli piani BAL, BAH, HAL da' quali si contiene l' angolo solido in A, sono rispettivamente uguali a' tre angoli piani EDC, EDF, FDC da' quali si contiene l' angolo solido in D, e sono similmente disposti; adunque l' angolo solido in A è ugnale all' angolo solido in D *prop. B. XI.*). Per la qual cosa ad una data linea retta, e ad un punto dato in essa si è costituito un angolo solido uguale ad un angolo solido dato, e contenuto da tre angoli piani. C. B. F.

PROP. XXVII. PROB.

Da una data linea retta descrivere un parallelepipedo simile e similmente posto ad un altro parallelepipedo dato.

Sia la data linea retta AB (*fig.* 27), e 'l dato parallelepipedo CD: bisogna dalla data linea retta AB descrivere un parallelepipedo simile e similmente posto al dato parallelepipedo CD.

Costituiscasi alla linea retta AB ed al punto A dato in essa un angolo solido uguale all' angolo solido in C (*prop. prec.*), il quale sia contenuto dagli angoli piani BAK, KAH, HAB, in modo che l' angolo BAK sia uguale all' angolo ECG, l' angolo KAH all' angolo GCF, e l' angolo HAB all' angolo FCE: e si faccia come EC a CG, così BA ad AK; e come GC a CF, così KA ad AH *prop.* 12. *VI.*); sarà per equalità ordinata come EC a CF, così BA ad AH (*prop.* 22. *V.*). Si compisca il parallelogrammo BH, ed il solido AL.

E perchè come la EC alla CG così sta la BA alla AK, e sono esse i lati intorno agli angoli uguali ECG, BAK; adunque il parallelogrammo BK è simile al parallelogrammo EG: e per la medesima ragione il parallelogrammo KH è simile al parallelogrammo GF, ed il parallelogram-

mo HB al parallelogrammo FE. Sicchè tre parallelogrammi del solido AL sono simili a tre parallelogrammi del solido CD; ma tre a tre opposti son simili ed uguali (*prop.* 24. *XI.*); dunque i sei parallelogrammi del solido AL sono rispettivamente simili a' sei parallelogrammi del solido CD; ed oltre a ciò, gli angoli solidi di essi sono rispettivamente uguali, perchè sono contenuti da angoli piani fra loro uguali e similmente disposti (*prop. B. XI.*): adunque il solido AL è simile al solido CD (*def.* 11. *XI.*). Per la qual cosa, dalla data linea retta AB si è descritto il parallelepipedo AL simile e similmente posto al dato parallelepipedo CD. C. B. F.

PROP. XXVIII. TEOR.

Se un solido parallelepipedo sia segato da un piano che passa per le diagonali de' piani opposti, sarà segato per metà.

Sia AB (*fig.* 28.) il solido parallelepipedo; e sieno DE, CF le diagonali de' piani opposti AH, GB. Ed essendo le due CD, FE parallele alla stessa GA, con la quale non sono nel medesimo piano, saranno le due CD, FE fra loro parallele (*prop.* 9. *XI.*); quindi le diagonali CF, DE saranno nel piano di queste parallele (*prop.* 7. *XI.*), e parallele fra loro (*prop.* 16. *XI.*). Dico il solido AB essere segato per metà dal piano CDEF.

E poichè il triangolo CGF è uguale al triangolo CBF, e'l triangolo ADE al triangolo DHE (*prop*. 34. *I.*); ed è il parallelogrammo CA uguale al parallelogrammo BE, che gli è opposto (*prop*. 24. *XI.*), ed il parallelogrammo GE al parallelogrammo CH; sarà il prisma contenuto da' due triangoli CGF, DAE, e da'tre parallelogrammi CA, GE, EC uguale al prisma che si contiene da'due triangoli CBF, DHE, e da'tre parallelogrammi BE, GH, EC; perciocchè sono essi contenuti da piani di numero e di grandezza uguali. Laonde tutto il solido AB è segato per metà dal piano CDEF. C. B. D.

SCOLIO I.

Per provare l'uguaglianza de'prismi, ne'quali si decompone il parallelepipedo, gli espositori e comentatori di Euclide si rapportano alla definizione decima, che da noi si è tralasciata, e che si trova inserita nel testo greco in questi termini: *le figure solide simili ed uguali sono quelle, che son contenute da piani simili ed uguali di numero e di grandezza.* Simson il primo avvertì l'uguaglianza de' solidi essere l'oggetto di una dimostrazione, e non già di una definizione; e non essere generalmente vero che le figure solide, contenute da piani simili ed uguali di numero e di grandezza, sono uguali fra loro.

In effetti, sia il cubo MB (*fig.* 29.); e si tirino nel quadrato DB le diagonali DB, EF; e dal punto C della loro intersezione si elevi al piano BEDF la perpendicolare CA (*prop.* 12. *XI.*), la quale si prolunghi dall' una e dall' altra parte del piano, in modo che la CG sia uguale alla CA, ma niuna di esse sia maggiore del lato BH del cubo; ed in fine si congiungano le BA, FA, DA, EA; e le BG, FG, DG, EG. E poichè le due AC, CB sono uguali alle due AC, CF, e comprendono angoli retti (*def.* 3 .*XI.*); sarà la base AB uguale alla base AF (*prop.* 4. *I.*); e per la medesima ragione la retta AE è uguale alla retta AD. Or perchè le due AC, CE sono uguali alle due AC, CB, e contengono angoli retti, sarà la base AE uguale alla base AB; adunque le quattro linee rette AB, AF, AE, AD, sono uguali fra loro. Similmente dimostreremo essere uguali fra loro le quattro linee rette GB, GF, GD, GE. Inoltre, essendo le due AC, CB uguali alle due GC, CB, ed uguali gli angoli ACB, GCB, perchè entrambi sono retti; sarà la base AB uguale alla base GB. Ma si è dimostrato essere uguali fra loro sì le rette AB, AF, AE, AD che le rette GB, GF, GD, GE; adunque ciascuna delle AB, AF, AE, AD è uguale a ciascuna delle GB, GF, GD, GE. Per la qual cosa i due triangoli ABF, GBF, che hanno i due lati AB, AF uguali a' due lati GB, GF, e comune la base FB, sono fra loro per-

fettamente uguali (*prop*. 8. *I*.); e per la medesima ragione sono perfettamente uguali fra loro i triangoli ADF, GDF; ed i triangoli ADE, GDE; e finalmente i triangoli AEB, GEB. In tal modo si otterranno due solidi, ciascuno contenuto da nove piani: cioè il primo da' cinque quadrati DK, KN, NB, EH, DN del cubo, e dai quattro triangoli che si costituiscono al punto A; e l'altro dagli stessi cinque quadrati, e da' quattro triangoli che si costituiscono al punto G; ed i piani dell'uno sono, come si è dimostrato, rispettivamente simili ed uguali a quelli dell'altro: pertanto i solidi non sono uguali; poichè il primo è uguale al cubo ed alla piramide, ed il secondo è uguale all'eccesso del cubo e della piramide.

A tal uopo il citato Simson aggiunse le proposizioni A, B, C, che da noi si sono arrecate; e cercò di confermare la verità delle proposizioni 25, 26, 28 ec. di questo libro, ed altre ancora del libro duodecimo, le quali, secondo le di lui espressioni, *infirmo hactenus innitebantur fundamento*: ma non si accorse il valentuomo che il principio da lui stabilito nella proposizione C non era applicabile alla proposizione 28, perciocchè non sono similmente disposti i piani di que' due prismi, ne' quali si divide un parallelepipedo segato dal piano che passa per le diagonali de' piani opposti. Quindi soggiungerò qui appresso una rigorosa dimostra-

zione ordita sulle vedute del Signor Legendre, che conobbe il primo questo neo geometrico non avvertito ancora da tanti commentatori ed espositori di Euclide.

SCOLIO II.

In primo luogo i lati AG, DC, EF, HB (*fig.* 28.) del solido parallelepipedo AB sieno perpendicolari alla base; e per le diagonali CF, DE si concepisca passare il piano: si dimostrerà, come nella proposizione, essere prismi i solidi ADEGCF, HDEBCF. Si applichi il prisma HDEBCF sul prisma ADEGCF in modo che il triangolo HDE si adatti sul triangolo ADE, facendo cadere il punto E sul punto D, e la linea retta EH su la DA; coinciderà il punto H col punto A, per essere la EH uguale alla DA; e perchè sono uguali gli angoli DAE, DHE, la linea retta DH coinciderà con la retta AE; e perchè sono uguali le rette, cadrà il punto D sul punto E: per la qual cosa il triangolo HDE combacerà col triangolo ADE. Oltre a ciò, la linea retta EF coinciderà con la DC, la HB con la GA, e la DC con la FE; altrimenti da un medesimo punto si potrebbero innalzare due linee rette perpendicolari ad un medesimo piano, e dalla medesima parte, lo che non può farsi (*prop.* 13. *XI.*); e per la uguaglianza di quelle rette, il punto F cadrà sul punto C, il punto

B sul punto G, e 'l punto C sul punto F. Sicchè il triangolo FBC combacerà col triangolo CGF; il parallelogrammo BE col parallelogrammo CA; il parallelogrammo CH col parallelogrammo GE; ed il parallelogrammo CE con se medesimo. Laonde i prismi ADEGCF, HDEBCF sono uguali fra loro.

Ma sieno i lati (*fig.* 30.) EA, FB, HD, GC del parallelepipedo BH inclinati alla base; e pe' punti B, F si conducano perpendicolarmente al lato BF i piani B*adc* F*ehg*, che incontreranno da una parte in *a*, *d*, *c*, e dall' altra in *e*, *h*, *g* i tre lati AE, DH, CG dello stesso parallelepipedo. I piani B*adc*, F*ehg* sono paralleli, perchè ad entrambi è perpendicolare la retta BF (*prop.* 14. *XI.*); ed il piano B*ae*F è parallelo al piano *cdhg*, perchè sono paralleli i piani BAEF, DCGH; e per la medesima ragione il piano FBc*g* è parallelo al piano *adhe*: dunque il solido B*adc*F*ehg* è un parallelepipedo, ed ha i lati perpendicolari alla base. Per la qual cosa, congiunte le diagonali B*d*, F*h*, sarà il prisma triangolare B*ad*F*eh* uguale al prisma triangolare B*dc*F*hg*. Ciò premesso, poichè l' una e l' altra delle rette AE, *ae* è uguale alla retta BF (*prop.* 34. *I.*), sarà la AE uguale alla *ae*; e tolta A*e* di comune, rimarrà A*a* uguale ad E*e*. Similmente si dimostra essere D*d* uguale ad H*h*. Si concepisca il solido F*e*EH*h* applicato sopra il solido B*a*AD*d*, in modo

che il triangolo F*eh* cada sopra il suo eguale B*ad*; allora il punto *e* cadendo sul punto *a*, ed il punto *h* sul punto *d*, i lati E*e*, H*h* cadranno su i loro eguali A*a*, D*d*, poichè essi son perpendicolari al medesimo piano B*ad*; quindi tutti i piani del solido F*e*EH*h* combaceranno con tutti i piani del solido B*a*AD*d*, e tali solidi saranno uguali fra loro. Aggiungasi lor di comune il solido BADF*he*, e sarà il prisma B*ad*F*eh* uguale al prisma BADFEH. Si dimostrerà similmente il prisma B*dc*F*hg* essere uguale al prisma BDCFHG: ma i prismi B*ad*F*eh*, B*dc*F*gh* sono uguali fra loro; dunque eziandio uguali fra loro sono i prismi BADFEH, BDCFHG.

PROP. XXIX. TEOR.

I solidi parallelepipedi che hanno la medesima base, e la medesima altezza, ed i lati insistenti alla base nelle stesse linee rette, saranno uguali fra loro.

I solidi parallelepipedi AH, AK (*fig.* 31.) abbiano la medesima base AB, e la medesima altezza; ed i loro lati insistenti alla base, AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK sieno nelle stesse linee rette FN, DK. Dico il solido AH essere uguale al solido AK.

E perchè le due figure CH, CK sono parallelogrammi, sarà l'una e l'altra delle DH, EK

uguale alla CB (*prop.* 34. *I.*), perciò DH è uguale ad EK; ed aggiuntavi di comune HE, sarà DE uguale ad HK. Inoltre CD è uguale a BH, e CE a BK (*prop.* 34. *I.*); adunque i due triangoli CDE, BHK sono uguali fra loro; ma il parallelogrammo DG è uguale all' altro HN (*prop.* 36. *I.*): e per la medesima ragione sono fra loro uguali i triangoli AFG, LMN; ed il parallelogrammo CF è uguale al parallelogrammo BM; e finalmente il parallelogrammo CG al parallelogrammo BN, perchè sono opposti (*prop.* 24. *XI.*). Laonde il prisma contenuto da' due triangoli AFG, CDE e da' tre parallelogrammi AD, DG, GC è uguale al prisma che si contiene da'due triangoli LMN, BHK e da'tre parallelogrammi BM, MK, KL: quindi tolto il prisma LMNBHK dal solido la cui base è il parallelogrammo AB, e'l piano ad esso opposto FDKN; e dal medesimo solido tolto ancora il prisma AFGCDE, rimarrà il solido parallelepipedo AH uguale al solido parallelepipedo AK. Per la qual cosa se due solidi parallelepipedi ec C. B. D.

PROP. XXX. TEOR.

I solidi parallelepipedi che hanno la medesima base, e la medesima altezza, ancorchè i lati insistenti alla base non sieno nelle stesse linee rette, pure sono uguali fra loro.

I solidi parallelepipedi CM, CN (*fig.* 32.) abbiano la medesima base AB, e la medesima altezza; ma i lati AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK, che insistono alla base, non sieno nelle stesse linee rette. Dico il solido CM essere uguale al solido CN.

Si prolunghino le FD, MH, e le NG, KE, fino a che convengano ne' punti O, P, Q, R; e si congiungano le AO, LP, BQ, CR. E poichè il piano LBHM è parallelo al piano opposto ACDF, ed il piano LBHM è quello in cui sono le rette parallele LB, MHPQ, ed in cui è la figura BLPQ; ed il piano ACDF è quello in cui sono le parallele AC, FDOR, ed in cui è la figura CAOR; adunque le figure BLPQ, CAOR sono ne' piani fra loro paralleli. Similmente, perchè il piano ALNC è parallelo al piano opposto CBKE, ed il piano ALNC è quello in cui sono le parallele AL, OPGN, ed in cui è la figura ALPO; ed il piano CBKE è quello in cui sono le parallele CB, RQEK,

ed in cui è la figura CBQR ; adunque le figure ALPO , CBQR sono ne' piani fra loro paralleli: ma sono eziandio fra loro paralleli i piani ACBL, ORQP , adunque il solido CP è parallelepipedo. Ora il solido CM la cui base è il parallelogrammo ACBL , ed opposto ad esso FDHM , è uguale al solido CP la cui base è il parallelogrammo ACBL , ed opposto ad esso ORQP (*prop. prec.*) ; perciocchè sono nella medesima base , ed i loro lati insistenti alla base, cioè AF , AO, CD, CR ; LM, LP, BH, BQ sono nelle stesse linee rette FR , MQ : e parimenti il solido CP è uguale al solido CN, perchè sono nella medesima base ACBL , ed i loro lati insistenti alle base, cioè AO , AG , LP , LN ; CR , CE , BQ , BK sono nelle stesse linee rette ON , RK. Laonde il solido CM è uguale al solido CN. Per la qual cosa se due solidi parallelepipedi ec. C. B. D.

PROP. XXXI. TEOR.

I solidi parallelepipedi che hanno uguali basi, e la medesima altezza , sono uguali fra loro.

I solidi parallelepipedi SE , CF (*fig.* 33.) siano nelle uguali basi SB, CD, ed abbiano la medesima altezza : dico il solido SE essere uguale al solido GF.

In primo luogo i lati de' detti parallelepipedi insistano perpendicolarmente alle basi SB , CD:

e si dispongano i solidi in modo che le basi siano nel medesimo piano, ed i lati CL, LB per dritto; la linea retta LM che insiste al punto L, sarà comune a' solidi SE, CF (*prop.* 4. *XI.*); e sieno SV, TX, BE, DF, OP, CN le altre rette che insistono alle basi. Se l'angolo SLB non è uguale all'angolo CLD, si prolunghino le DL, TS fino a che convengano in A: e menata per B la BH parallela alla DA, si prolunghino le HB, OD fino a che convengano in Q; e su le basi AB, LQ si compiscano i solidi AE, LR, in maniera che la ML sia una delle loro linee rette insistenti alle basi.

Il solido AE, la cui base è il parallelogrammo LE, ed il piano ad esso opposto AK, è uguale al solido SE la cui base è il parallelogrammo LE, ed il piano ad esso opposto SX, perciocchè sono nella medesima base LE, della medesima altezza, ed i loro lati insistenti alla base cioè LA, LS, BH, BT; MG, MV, EK, EX sono nelle medesime linee rette AT, GX (*prop.* 29. *XI.*). E poichè il parallelogrammo AB è uguale al parallelogrammo SB, per essere nella medesima base LB, e tra le medesime parallele LB, AT (*prop.* 35. *I.*); ed è per ipotesi il parallelogrammo SB uguale all'altro CD, adunque il parallelogrammo AB è uguale al parallelogrammo CD; quindi sarà come il parallelogrammo AB al parallelogrammo LQ, così il parallelogrammo CD allo stesso LQ, (*prop.* 7. V.). Ed essendo

il solido parallelepipedo AR segato dal piano LMEB parallelo a'piani opposti AK, DR, sarà come le base AB alla base LQ, così il solido AE al solido LR (*prop.* 25. *XI*): e parimenti essendo il solido parallelepipedo CR segato dal piano LF parallelo a' piani opposti CP, BR, sarà come la base CD alla base LQ, così il solido CF al solido LR; ma si è dimostrato come la base AB alla base LQ, così essere la base CD alla base LQ; adunque come il solido AE al solido LR, così il solido CF al solido LR; e perciò il solido AE è uguale al solido CF: ma il solido AE si è dimostrato uguale al solido SE; adunque il solido SE è uguale al solido CF.

Inoltre le linee rette (*fig.* 34.) AG, HK, BE, LM; CN, RS, DF, OP non sieno perpendicolari alle basi: dico parimente il solido AE essere uguale al solido CF. Si tirino (*prop.* 11. *XI.*) da' punti G, K, E, M; N, S, F, P al sottoposto piano le perpendicolari GQ, KT, EV, MX; NY, SZ, FI, PU; ed incontrino i piani ne' punti Q, T, V, X; Y, Z, I, U, e si congiungano le QT, TV, VX, XQ; YZ, ZI, IU, UY. E poichè le GQ, KT sono perpendicolari al medesimo piano, saranno fra loro parallele (*prop.* 6. *XI.*); e sono ancor parallele le MG, EK; adunque i piani ET, MQ de' quali uno passa per EK, KT, e l'altro per MG, GQ, sono paralleli fra loro (*prop.* 15. *XI*); e

per la medesima ragione anche i piani MV, GT sono fra loro paralleli : adunque il solido QE è parallelepipedo. Si dimostrerà similmente il solido YF essere parallelepipedo. Or è chiaro, da quanto si è premesso , il solido EQ essere uguale al solido FY; perciocchè sono nelle uguali basi MK, PS, hanno la medesima altezza, ed i loro lati insistono alle basi perpendicolarmente: ma il solido EQ è uguale al solido AE , ed il solido FY al solido CF (*prop.* 29. *ovvero* 30 *XI.*), poichè essi sono nella medesima base, e della medesima altezza; adunque il solido AE è uguale al solido CF. Per la qual cosa se due solidi parallelepipedi ec. C. B. D.

PROP. XXXII. TEOR.

I solidi parallelepipedi che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi.

Sieno i solidi parallelepipedi AB, CD (*fig.* 35.) che abbiano la medesima altezza : dico essere fra loro come le basi , cioè come la base AE alla base CF, così il solido AB al solido CD.

Si applichi alla linea retta FG il parallelogrammo FH uguale al parallelogrammo AE, in modo che l'angolo FGH sia uguale all'angolo LCG (*cor. prop.* 45. *I.*); e si compisca il parallelepipedo GK , la cui base sia FH, ed uno

de' lati insistenti alla base sia FD: adunque il solido AB è uguale al solido GK (*prop.* 31. *XI.*), poichè sono nelle uguali basi, ed hanno la medesima altezza. E perchè il solido parallelepipedo CK è segato dal piano DG parallelo ai piani opposti, sarà come la base HF alla base FC, così il solido HD al solido DC (*prop.* 25. *XI.*): ma la base FH è uguale alla base AE, ed il solido GK al solido AB; adunque come la base AE alla base CF, così è il solido AB al solido CD. Sicchè i solidi parallelepipedi ec. C. B. D.

Cor. Quindi i prismi a basi triangolari, e che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi.

I prismi le cui basi sono i triangoli AEM, CFG (*fig.* 25.), ed i triangoli ad essi opposti NBO, DPQ, abbiano la medesima altezza; e si compiscano i parallelogrammi AE, CF, ed i parallelepipedi AB, CD; e nel primo sia MO una delle linee rette insistenti alla base, e nell' altro GQ. E poichè i solidi parallelepipedi AB, CD hanno la medesima altezza, saranno tra loro come la base AE alla base CF; per la qual cosa i prismi, che sono le metà di essi (*prop.* 28. *XI.*), sono eziandio tra loro come la base AE alla base CF, ovvero come il triangolo AEM al triangolo CFG (*prop.* 15. *V.*).

PROP. XXXIII. TEOR.

I parallelepipedi simili sono fra loro in triplicata ragione de' lati omologhi.

Siano i solidi parallelepipedi simili AB, CD (*fig.* 36.); ed il lato AE sia omologo al lato CF. Dico il solido AB essere al solido CD in triplicata ragione di AE a CF.

Si pongano le EK, EL, EM per dritto alle AE, GE, HE; e si ponga EK uguale a GF; EL ad FN; ed ME ad FR; e si compiscano il parallelogrammo KL, ed il solido kO. E poichè per la somiglianza de' solidi AB, CD, l'angolo AEG è uguale all' angolo CFN; ed è l' angolo AEG uguale all' angolo KEL (*prop.* 15. *I.*), sarà l' angolo KEL uguale all' angolo CFN; ma sono le due KE, EL uguali alle due CF, FN, dunque il parallelogrammo KL è uguale e simile al parallelogrammo CN. Per la medesima ragione il parallelogrammo MK è uguale e simile al parallelogrammo CR, e parimenti il parallelogrammo OE al parallelogrammo FD: sicchè tre parallelogrammi del solido KO sono uguali e simili a tre parallelogrammi del solido CD; ma tre a tre opposti sono simili ed uguali (*prop.* 24. *XI.*), adunque il solido KO è uguale e simile al solido CD (*prop. C. XI.*). Compiscasi il paralle-

logrammo GK; e su le basi GK, KL parallelogramme, e con la medesima altezza di AB, compiscansi i solidi EX, LP tali che la linea retta EH sia una di quelle che insistono alle basi.

Per la somiglianza de' solidi AB, CD, e permutando, come la AE, alla CF, così è la EG alla FN, e la EH alla FR; è poi la FC uguale alla EK, la FN alla EL, e la FR alla EM, adunque sarà come la AE alla EK, così la EG alla EL, e la HE alla EM: ma come la AE alla EK, così il parallelogrammo AG al parallelogrammo GK (*prop.* 1. *VI.*); e come la GE alla EL, così GK a KL; e come la HE alla EM, così PE a KM; come dunque il parallelogrammo AG è al parallelogrammo GK, così GK a KL, e PE a KM: ma come AG a GK, così il solido AB al solido EX (*prop.* 25. *XI.*); e come GK a KL, così il solido EX al solido PL; e come PE a KM, così il solido PL al solido KO; dunque eziandio come il solido AB al solido EX, così EX a PL, e PL a KO. Ora se quattro grandezze sieno in continua proporzione, la prima si dice avere alla quarta ragion triplicata di quella che ha alla seconda; ancor dunque il solido AB ha al solido KO ragion triplicata di quella che AB ha ad EX: ma come AB ad EX, così il parallelogrammo AG al parallelogrammo GK, e la retta AE alla retta EK; per la qual cosa il solido AB avrà al solido KO ragion triplicata di quella che ha la AE alla EK: ma il solido

KO è uguale al solido CD, e la retta EK è uguale alla retta CF, adunque il solido AB ha al solido CD ragion triplicata di quella che il lato AE ha al suo omologo CF. C. B. D.

Cor. Da ciò è manifesto, che, se quattro linee rette siano proporzionali, come sarà la prima alla quarta, così il parallelepipedo che si fa dalla prima è al solido simile e similmente descritto dalla seconda; perciocchè la prima ha alla quarta ragion triplicata di quella che ha alla seconda (*def.* 11. *V.*).

PROP. D. TEOR.

I solidi parallelepipedi contenuti da parallelogrammi equiangoli, ciascuno a ciascuno, cioè quelli che hanno gli angoli solidi uguali, sono fra loro in ragion composta dalle ragioni de' lati che sono intorno agli angoli solidi uguali.

Siano i solidi parallelepipedi AB, CD (*fig. D.*); ed il solido AB sia contenuto da' parallelogrammi AE, AF, AG equiangoli, ciascuno a ciascuno, ai parallelogrammi CH, CK, CL, dai quali si contiene il solido CD. Dico il solido AB essere al solido CD in ragion composta di AM a DL, di AN a DK, e di AO a DH.

Si prolunghino le MA, NA, OA verso i punti P, Q, R, in maniera che la AP sia uguale

alla DL, la AQ alla DK, e la AR alla DH; e compiscasi il solido parallelepipedo AX, contenuto cioè da' parallelogrammi AS, AT, AV rispettivamente simili ed uguali ai parallelogrammi CH, CK, CL: il solido AX sarà dunque simile ed uguale al solido CD (*prop. C. XI*). Si compisca ancora il solido AY la cui base è AS, ed AO una delle linee rette che insistono alla base; e si esponga una retta qualsivoglia A, e come MA ad AP, così si faccia A alla retta B; e come NA ad AQ, così si faccia B a C; e come OA ad AR, così si faccia C a D.

E poichè il parallelogrammo AE è equiangolo al parallelogrammo AS, sarà AE ad AS in ragion composta di MA ad AP, e di NA ad AQ; ma come MA ad AP, così A sta a B; e come NA ad AQ, così B sta a C: adunque il parallelogrammo AE è al parallelogrammo AS in ragion composta di A a B e di B a C, cioè come A a C (*prop.* 23. *VI.*). Ora i solidi parallelepipedi AB, AY che sono costituiti fra i piani paralleli BOY, EAS, hanno la medesima altezza; quindi il solido AB è al solido AY, come la base AE alla base AS (*prop.* 32. *XI.*), cioè come la retta A alla retta C; ed il solido AY è al solido AX, come la base OQ alla base QR (*prop.* 25. *XI.*), cioè come la retta OA alla retta AR, ossia come la retta C alla retta D. Per la qual cosa essendo il solido AB al solido AY, come la retta A alla retta C; ed il solido AY al solido AX, come la retta

c alla retta d; sarà per egualità il solido AB al solido AX ossia CD, come la retta a alla retta d: ma a sta a d in ragion composta di a a b, di b a c, e di c a d (*def. A. V.*); le quali ragioni sono rispettivamente uguali a quelle de' lati MA ad AP, NA ad AQ, ed OA ad AR; ed i lati AP, AQ, AR sono uguali ai lati DL, DK, DH, ciascuno a ciascuno: adunque il solido AB è al solido CD in ragion composta dalle ragioni de' lati AM a DL, AN a DK, ed AO a DH. C. B. D.

PROP. XXXIV. TEOR.

Le basi de' solidi praralle lepipedi uguali sono reciprocamente proporzionali alle altezze; ed i solidi parallelepipedi, de' quali le basi sono reciprocamente proporzionali alle altezze, sono uguali fra loro.

Sieno uguali i solidi parallelepipedi AB, CD (*fig.* 37.): dico le loro basi essere reciprocamente proporzionali alle altezze; cioè come la base EH alla base NP, così essere l'altezza del solido CD all'altezza del solido AB.

In primo luogo i lati AG, EF, LB, HK, CM, NX, OD, PR, insistano alle basi de' detti solidi ad angoli retti. Se la base EH sia uguale alla base NP, per la uguaglianza de' solidi AB, CD, sarà ancora la CM uguale alla AG: per-

ciocchè, se le basi EH, EP essendo uguali, non sieno uguali le altezze AG, CM, nè anche il solido AB sarà uguale al solido CD; lo che è contrario alla supposizione. Adunque l'altezza CM è uguale all'altezza AG; e perciò come la base EH alla base NP, così sarà la CM alla AG.

Non sia la base EH uguale alla base NP, ma la EH sia maggiore; poichè il solido AB è uguale al solido CD, sarà la CM maggiore della AG; e fatta la CT uguale alla AG, dalla base NP, e coll'altezza CT si compisca il parallelepipedo CV. E perchè il solido AB è uguale al solido CD, sarà come il solido AB al solido CV, così il solido CD al solido CV (*prop.* 7. *V.*): ma come il solido AB al solido CV, così la base EH alla base NP (*prop.* 32. *XI.*), perciocchè i solidi AB, CV sono ugualmente alti; e come il solido CD all'altro CV, così la base MP alla base PT (*prop.* 25. *XI.*), e la retta MC alla retta CT (*prop.* 1. *VI.*); come dunque la base EH è alla base NP, così la MC alla CT; ma la CT è uguale alla AG, adunque come la base EH è alla base NP, così la MC alla AG. Sicchè le basi de' solidi parallelepipedi uguali AB, CD sono reciprocamente proporzionali alle altezze.

Ma sieno le basi de'solidi parallelepipedi AB, CD reciprocamente proporzionali alle altezze, cioè sia come la base EH alla base NP, così l'altezza del solido CD all'altezza del solido AB:

dico il solido AB essere uguale al solido CD. Sieno parimente i loro lati perpendicolari alle basi: e se la base EH sia uguale alla base NP, perchè la base EH è alla base NP come l'altezza del solido CD all'altezza del solido AB, sarà l'altezza del solido CD uguale all'altezza del solido AB; ma i parallelepipedi, che sono nelle uguali basi e della medesima altezza, sono uguali fra loro (*prop.* 31. *XI.*); adunque il solido AB è uguale al solido CD.

Che se la base EH non sia uguale alla base NP, e sia la EH maggiore; poichè come la base EH alla base NP, così CM altezza del solido CD ad AG altezza del solido AB, sarà la CM maggiore della AG; e perciò fatta la CT uguale alla AG, si compisca similmente il solido GV. E perchè come la base EH alla base NP, così la CM alla AG, e la AG è uguale alla CT; adunque sarà come la base EH alla base NP, così la MC alla CT: ma come la base EH alla base NP, così il solido AB al solido CV (*prop.* 32. *XI.*), e come la MC alla CT, così la base MP alla base PT, ed il solido CD al solido CV (*prop.* 25. *XI.*); come dunque il solido AB al solido CV, così il solido CD al solido CV. Per la qual cosa l'uno e l'altro de' solidi AB, CD avendo al solido CV la medesima ragione, sarà il solido AB uguale al solido CD. C. B. D.

Inoltre, le rette (*fig.* 38.) FE, BL, CA,

KH; XN, DO, MC, RP non sieno ad angoli retti alle basi de' solidi; e da' punti F, B, K, G; X, D, R, M ai piani delle basi EH, NP si abbassino le perpendicolari, le quali incontrino i detti piani ne' punti S, Y, V, T; Q, I, U, Z, e si compiscano i solidi FV, XU, che saranno parallelepipedi. come nell' ultimo caso della prop. 31. di questo libro si è dimostrato. Dico che essendo uguali i solidi AB, CD, le basi saranno reciprocamente proporzionali alle altezze: cioè come la base EH alla base NP, così l' altezza del solido CD all' altezza del solido AB. Perciocchè il solido AB è per ipotesi uguale al solido CD, ma al solido AB è uguale il solido BT, perchè sono nella medesima base FK; e della medesima altezza; ed il solido DC è uguale al solido DZ, perchè sono nella medesima base XR, e della medesima altezza (*prop.* 29. *oppure* 30. *XI.*); sarà dunque il solido BT uguale al solido DZ. Ma le basi de' solidi parallelepipedi uguali quando i loro lati insistono alle basi perpendicolarmente, sono in ragion reciproca delle altezze; adunque come la base FK alla base XR, così l' altezza del solido DZ all' altezza del solido BT: ma la base FK è uguale alla base EH, e la base XR alla base NP, onde come la base EH alla base NP, così l' altezza del solido DZ all' altezza del solido BT; sono però le medesime le altezze de' solidi DZ, DC, come ancora de' solidi BT, BA; adunque

come la base EH alla base NP, così l'altezza del solido DC all'altezza del solido BA. Per la qual cosa le basi de' parallelepipedi uguali AB , CD sono reciprocamente proporzionali alle altezze.

Similmente , sieno le basi de' solidi parallelepipedi AB , CD, reciprocamente proporzionali alle altezze , cioè sia come la base EH alla base NP , così l' altezza del solido CD all' altezza del solido AB. Dico il solido AB essere uguale al solido CD. Imperciocchè fatta la stessa costruzione , essendo come la base EH alla base NP così l' altezza del solido CD all' altezza del solido AB , ed essendo la base EH uguale alla base FK , e la NP alla XR ; sarà come la base FK alla base XR, così l' altezza del solido CD all' altezza del solido AB : ma sono le stesse le altezze de' solidi AB , BT , non che de' solidi CD, DZ ; adunque come la base FK alla base XR, così l' altezza del solido DZ all' altezza del solido BT. Sicchè le basi de' solidi parallelepipedi BT , DZ sono reciprocamente proporzionali alle altezze ; ma i loro lati insistono alle basi ad angoli retti , adunque , come precedentemente si è dimostrato , il solido BT è uguale al solido DZ : è poi il solido BT uguale al solido BA , ed il solido DZ al solido DC (*prop.* 29. *oppure* 30 *XI.*), perciocchè sono nelle medesime basi, e della medesima altezza ; laonde anche il solido AB è uguale al solido CD. C. B. D.

PROP. XXXV. TEOR.

Se ai vertici di due angoli piani uguali si costituiscano linee rette in sublime, che con le linee rette poste da principio contengano angoli uguali, ciascuno a ciascuno; indi si prendano nelle sublimi quali punti si vogliano, e da essi a' piani in cui sono gli angoli si abbassino le perpendicolari; e finalmente si congiungano i punti fatti dalle perpendicolari ne' piani co' vertici de' primi angoli: le congiungenti con le rette sublimi conterranno angoli uguali.

Siano due angoli piani uguali BAC, EDF (*fig.* 39.); e da' punti A, D si costituiscano in sublime le linee rette AG, DM, le quali con le linee rette poste da principio contengano angoli uguali, ciascuno a ciascuno, cioè l'angolo GAB uguale all'angolo MDE, e l'angolo GAC uguale all'angolo MDF; indi si prendano nelle AG, DM quali punti si vogliano G, M, da' quali si tirino ai piani che passano per BAC, EDF le perpendicolari GL, MN che incontrino i detti piani ne' punti L, N; e finalmente si congiungano le LA, ND. Dico l'angolo GAL essere uguale all'angolo MDN.

Pongasi la AH uguale alla DM, e per H si meni la HK parallela alla GL. Essendo la GL

perpendicolare al piano BAC, anche la HK sarà perpendicolare al piano BAC (*prop.* 8. *XI*). Si tirino dai punti K, N alle linee rette AB, AC, DE, DF, le perpendicolari KB, KC, NE, NF; e si congiungano le HB, BC, ME, EF. E poichè la HK è perpendicolare al piano BAC, anche il piano HBK che si conduce per essa sarà perpendicolare al piano BAC (*prop.* 18. *XI.*); ma nel piano BAC si è tirata la AB perpendicolare alla BK, comune sezione de' piani, adunque la AB è perpendicolare al piano HBK (*def.* 4. *XI.*), ed a tutte le linee rette che la incontrano, e sono nel medesimo piano (*def.* 3. *XI.*); cioè alla retta BH che la incontra, ed è nel detto piano, onde l'angolo ABH è retto, e per la medesima ragione è retto l'angolo DEM, quindi l'angolo ABH è uguale all'angolo DEM; ma l'angolo HAB è uguale all'angolo MDE, adunque i due triangoli HAB, MDE hanno due angoli uguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato uguale ad un lato che sottende uno degli angoli uguali, cioè HA uguale a DM: per la qual cosa, dovendo essere i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati, ciascuno a ciascuno (*prop.* 26. *I.*), sarà la AB uguale alla DE. Similmente, congiunte le HC, MF, dimostreremo la AC essere uguale alla DF. Ora essendo la AB uguale alla DE, e la AC alla DF, le due BA, AC saranno uguali alle due ED, DF; ed ancor l'angolo BAC è uguale all'angolo EDF, dunque la base BC è

uguale alla base EF, ed i rimanenti angoli sono uguali a' rimanenti angoli (*prop.* 4. *I.*), cioè l'angolo ABC all'angolo DEF: ma l'angolo retto ABK è uguale all'angolo retto DEN, dunque il rimanente angolo CBK è uguale al rimanente FEN; e per la medesima ragione ancor l'angolo BCK è uguale all'angolo EFN. Sicchè son due triangoli BCK, EFN che hanno due angoli uguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato uguale ad un lato, che è adiacente agli angoli uguali, cioè BC ad EF; avranno i rimanenti lati uguali a' rimanenti lati (*prop.* 26. *I.*), e perciò la BK è uguale alla EN; ma anche la AB è uguale alla DE, laonde le due AB, BK sono uguali alle due DE, EN, e contengono angoli retti; adunque la base AK è uguale alla base DN. E perchè la AH è uguale alla DM, sarà il quadrato di AH uguale al quadrato di DM; ma al quadrato di AH sono uguali i quadrati di AK, KH (*prop.* 47. *I.*), essendo retto l'angolo AKH; ed al quadrato di DM sono uguali i quadrati di DN, NM, essendo retto l'angolo DNM: dunque i quadrati di AK, KH sono uguali a' quadrati di DN, NM, de'quali il quadrato di AK è uguale al quadrato di DN; quindi il rimanente quadrato di HK è uguale al rimanente quadrato di NM, e la linea retta HK è uguale alla MN. Ed essendo le due HA, AK uguali alle due MD, DN, ciascuna a ciascuna, e la base HK uguale alla base MN, come si è dimostrato, sarà l'angolo HAK uguale all'angolo MDN. Sic-

chè se ai vertici di due angoli piani ec. C. B. D.

Cor. Da ciò è manifesto, che se due angoli piani siano uguali, e da' loro vertici si costituiscano linee rette sublimi uguali, che con le rette poste da principio contengano angoli uguali, ciascuno a ciascuno, le perpendicolari, che dagli estremi di dette sublimi si tirano ai piani in cui sono i primi angoli, sono uguali fra loro.

PROP. XXXVI. TEOR.

Se tre linee rette siano proporzionali, il solido parallelepipedo fatto dalle tre linee rette sarà uguale al parallelepipedo equilatero che si fa dalla media, equiangolo al primo.

Sieno tre linee rette proporzionali A, B, C (*fig.* 40.), cioè sia A a B, come B a C. Dico il solido che si fa dalle A, B, C, essere uguale al solido equilatero che si fa dalla B, equiangolo all' anzidetto.

Espongasi l'angolo solido D contenuto dagli angoli piani EDF, FDG, GDE; e pongasi uguale alla retta B ciascuna delle ED, DF, FG, e compiscasi il solido parallelepipedo DH; e pongasi uguale alla retta A la linea retta LK, ed al punto K in essa, costituiscasi (*prop.* 26. *XI.*) l'angolo solido contenuto dagli angoli piani LKM, MKN, NKL, rispettivamente uguali agli angoli piani EDF, FDG, GDE; e pongasi la KN uguale

alla retta B, e la KM alla retta C; e compiscasi il solido parallelepipedo KO. E poichè come A a B, così B a C, e ad A è uguale la LK, a B ciascuna delle DE, DF, ed a C la KM; sarà come la LK alla ED, così la DF alla KM: quindi i parallelogrammi LM, EF, avendo i lati intorno agli angoli uguali reciprocamente proporzionali, sono uguali fra loro (*prop.* 14 *VI.*). E perchè gli angoli piani EDF, LKM sono fra loro uguali, ed ai vertici di essi si sono costituite le linee rette sublimi uguali DG, KN, le quali colle linee rette poste da principio contengono angoli uguali, ciascuno a ciascuno, le perpendicolari che si tirano da'punti G, N ai piani EDF, LKM, saranno uguali fra loro (*cor. prop. prec.*); laonde i solidi KO, DH sono della medesima altezza. Ma i solidi parallelepipedi che sono nelle uguali basi, e della medesima altezza, sono fra loro uguali (*prop.* 31 *XI.*); adunque il solido KO è uguale al solido DH. Ora il solido KO è fatto dalle tre A, B, C, ed il solido DH dalla media B: sicchè se tre linee rette ec. C. B. D.

PROP. XXXVII. TEOR.

Se quattro linee rette siano proporzionali, anche i solidi parallelepipedi che si fanno da esse simili e similmente descritti saranno proporzionali; e se i solidi parallelepipedi che si fanno da esse simili e similmente descritti siano proporzionali, le linee rette saranno ancora proporzionali.

Sieno quattro linee rette proporzionali (*fig.* 41.) AB, CD, EF, GH; cioè sia come la AB alla CD, così la EF alla GH; e si descrivano da esse i solidi parallelepipedi simili e similmente posti AK, CL, EM, GN. Dico come AK a CL, così essere EM a GN.

Si facciano continuamente proporzionali le AB, CD, O, P (*prop.* 11. *VI.*); non che le EF, GH, Q, R. E poichè come la AB è alla CD, così la EF alla GH, sarà la CD alla retta O, come la GH alla retta Q; ma la retta O alla retta P, come la retta Q alla retta R; quindi per egualità, come la AB è alla retta P, così la EF alla retta R (*prop.* 22. *V.*): ma come la AB alla retta P, così il solido AK è al solido CL (*cor. prop.* 33. *XI.*); e come la EF alla retta R, così il solido EM è al solido GN; come dunque il solido AK al solido CL, così è il solido EM al solido GN (*prop.* 11. *V.*).

Inoltre, sia come il solido AK al solido CL, così il solido EM al solido GN. Dico come la linea retta AB alla retta CD, così essere la retta EF alla retta GH.

Si faccia come la AB alla CD, così la EF alla ST, e dalla ST si descriva (*prop.* 27. *XI.*) il solido parallelepipedo SV simile e similmente posto all' uno e all' altro de' solidi EM, GN. E poichè come la AB alla CD, così è la EF alla ST, e dalle AB, CD si sono descritti i parallelepipedi simili e similmente posti AK, CL, e dalle EF, ST i parallelepipedi simili e similmente posti EM, SV; sarà come AK a CL, così EM ad SV: ma si è supposto come AK a CL, così EM a GN; adunque il solido GN è uguale al solido SV (*prop.* 9. *V.*); e sono ancora simili e similmente posti, quindi i piani dai quali sono contenuti saranno simili ed uguali; ed uguali saranno fra loro i lati omologhi GH, ST. Per la qual cosa essendo come la AB alla CD, così la EF alla ST, e la ST uguale alla GH; sarà come la AB alla CD, così la EF alla GH. Laonde se quattro linee rette ec. C. B. D.

PROP. XXXVIII. TEOR.

Se un piano sia perpendicolare ad un altro piano, e prendasi in uno di essi quel punto che si vorrà, dal quale si tiri all' altro piano la perpendicolare; questa cadrà nella comune sezione di detti piani.

Sia il piano CD (*fig.* 42.) perpendicolare al piano AB, e la loro comune sezione sia la AD; e prendasi nel piano CD qualsivoglia punto E. Dico la perpendicolare che dal punto E si tira al piano AB, cadere nella AD.

Se può essere, cada fuori, come la EF, ed incontri il piano AB nel punto F; e dal punto F alla DA nel piano AB tirisi la perpendicolare FG (*prop.* 12. *I.*), la quale sarà eziandio perpendicolare al piano CD (*def.* 4. *IX.*); e congiungasi la EG. Perciocchè la FG è perpendicolare al piano CD, sarà perpendicolare alla linea retta EG che la incontra, ed è nel piano CD (*def.* 3. *XI.*); quindi l'angolo FGE è retto: ma perchè la EF è perpendicolare al piano AB, ancor l'angolo EFG è retto, adunque due angoli del triangolo EFG sono uguali a due retti, lo che è assurdo. Sicchè la perpendicolare tirata dal punto E al piano AB non cadrà fuori della linea

retta AD; ma è necessario che cada in essa. Se dunque un piano ec. C. B. D. (*).

PROP. XXXIX. TEOR.

Se in un solido parallelepipedo si seghino per metà i lati di due piani opposti, e pe' punti medii si conducano i piani; la comune sezione di detti piani ed il diametro del solido parallelepipedo si segheranno scambievolmente per metà.

Nel solido parallelepipedo AF (*fig.* 43.), i lati de' piani opposti CF, AH siano segati per metà ne' punti K, L, M, N; X, O, P, R; e si congiungano le KL, MN, XO, PR. Essendo le DK, CL uguali e parallele, saranno le KL, DC pa-

(*) N. B. Se un piano sia perpendicolare ad un altro piano, e da un punto dato in uno di essi si voglia condurre all' altro piano la perpendicolare, è chiaro che ciò si farà, conducendo da quel punto alla comune sezione de' piani la perpendicolare, la quale, in forza della definizione 4 di questo libro, sarà perpendicolare al piano sottoposto: e siccome una è la perpendicolare, che da quel punto si può condurre al piano sottoposto, è necessario, nella nostra ipotesi, che la detta perpendicolare cada nella comune sezione de' piani. Quindi il Simson opina essere inutile questa proposizione, e la crede aggiunta a questo Libro da qualche imperito di geometria.

rallele fra loro (*prop.* 33. *I.*); e per la medesima ragione saranno fra loro parallele le MN, BA: ma la BA è parallela alla DC; adunque l'una e l'altra delle KL, BA è parallela alla DC, con la quale non sono nel medesimo piano, quindi sarà la KL parallela alla BA (*prop.* 9. *XI.*); ed essendo l'una e l'altra delle KL, MN parallele alla BA, con la quale non sono nel medesimo piano, sarà la KL parallela alla MN: per la qual cosa le KL, MN sono in un piano. Similmente si dimostrerà essere in un piano le XO, PR. Or sia YS la comune sezione de' piani KN, XR, e DG il diametro del solido parallelepipedo AF. Dico le YS, DG incontrarsi fra loro, e segarsi scambievolmente per metà.

Si congiungano le DY, YE, BS, SG. Perciocchè la DX è parallela alla OE, saranno uguali gli angoli alterni DXY, YOE (*prop.* 29. *I.*). E poichè la DX è uguale alla OE, e la XY alla YO, e contengono angoli uguali, sarà la base DY uguale alla base YE, ed i rimanenti angoli uguali ai rimanenti angoli (*prop.* 4. *I.*); cioè l'angolo XYD è uguale all'angolo OYE, quindi la DYE è linea retta (*prop.* 14. *I.*); e per la medesima ragione la BSG è linea retta, e la BS è uguale alla SG. Ora essendo la CA uguale e parallela alla DB, e la CA altresì uguale e parallela alla EG, sarà la DB uguale e parallela alla EG (*prop.* 9. XI.); ma vengono congiunte dalle linee rette DE, BG, adunque

la DE è uguale e parallela alla BG (*prop.* 33. *I.*). e si sono presi nell' una e l' altra di essi i punti D, Y, G, S, e congiunte le DG, YS; sono dunque le DG, YS in un piano; ed è chiaro che debbono incontrarsi, e s' incontrino in T. E poichè la DE è parallela alla BG, sarà l' angolo EDT uguale all' angolo BGT, essendo alterni (*prop.* 29. *I.*); ma ancor l' angolo DTY è uguale all' angolo GTS (*prop.* 15. *I.*), sono dunque due triangoli DTY, GTS che hanno due angoli uguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato uguale ad un lato, che sottende uno degli angoli uguali, cioè DY a GS, perciocchè sono metà delle DE, BG: laonde avranno i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati, vale a dire la DT uguale alla TG, e la YT alla TS. Sicchè se in un solido parallelepipedo ec. C. B. D.

PROP. XL. TEOR.

Se siano due prismi triangolari ugualmente alti, de' quali uno abbia per base un parallelogrammo, e l' altro un triangolo, e sia il parallelogrammo doppio del triangolo; tali prismi saranno uguali fra loro.

Siano i prismi ugualmente alti ABCDEF, GHKLMN (*fig.* 44.), de' quali uno è contenuto da' due triangoli ABE, CDF, e da' tre pa-

rallelogrammi AD, DE, EC; e l'altro da' due triangoli GHK, LMN, e da' tre parallelogrammi LH, HN, NG; ed il primo abbia per base il parallelogrammo AF, e l'altro il triangolo GHK, e sia il parallelogrammo AF doppio del triangolo GHK. Dico il prisma ABCDEF essere uguale al prisma GHKLMN.

Si compiscano i solidi AX, GO. E poichè il parallelogrammo AF è doppio del triangolo GHK, ed il parallelogrammo HK è ancor doppio del triangolo GHK (*prop.* 34. *I.*); sarà il parallelogrammo AF uguale al parallelogrammo HK. Ma i solidi parallelepipedi che sono nelle uguali basi, e della medesima altezza, sono fra loro uguali (*prop.* 31. XI.); adunque il solido AX è uguale al solido GO. E' però del solido AX metà il prisma ABCDEF, e del solido GO ne è metà il prisma GHKLMN (*prop.* 28. XI.); laonde il prisma ABCDEF è uguale al prisma GHKLMN. Quindi se siano due prismi triangolari ugualmente alti, de' quali uno abbia per base un parallelogrammo, e l'altro ec. C. B. D.

FINE DELL' UNDECIMO LIBRO.

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE

LIBRO DUODECIMO.

LEMMA I. (*).

Esposte due grandezze disuguali, se dalla maggiore si tolga più della metà, e da ciò che resta si tolga ancora più della metà, e così sempre si faccia; si giugnerà finalmente ad ottenere una grandezza, che sarà minore della grandezza minore esposta.

Siano due grandezze disuguali AB, C (*fig.* 45.), ed AB sia la maggiore. Dico, che, se da AB se ne tolga più della metà, e da ciò che resta se ne tolga di nuovo più della metà, e questo si faccia sempre, si otterrà finalmente una certa grandezza, che sarà minore della grandezza C.

Perciocchè la grandezza C moltiplicata può addivenire maggiore della grandezza AB, si mol-

(*) N. B. Qnesto lemma, che è la proposizione prima del libro decimo, è necessario per ben intendere alcune proposizioni di questo libro.

tiplichi, e sia DE la moltiplice di C maggior di AB; indi si divida la DE nelle parti DF, FG, GE uguali a C; e si tolga da AB più della metà BH, e da AH si tolga ancora più della metà HK, e questo si seguiti a fare finchè si ottengano nella AB tante divisioni, quante ve ne sono nella DE; e siano AK, KH, HB le parti della AB uguali di numero alle parti DF, FG, GE della DE. E poichè la DE è maggiore della AB, e si è tolto dalla DE meno della metà EG, ma dalla AB più della metà BH; sarà la rimanente GD maggiore della rimanente HA. Similmente, poichè la GD è maggiore della HA, e si è tolta dalla GD la metà GF, ma dalla HA più della metà HK; sarà la rimanente FD maggiore della rimanente AK: ma la FD è uguale alla grandezza C; adunque la grandezza C sarà maggiore della rimanente AK. Per la qual cosa della AB è rimasta la grandezza AK minore della minore esposta C. C. B. D.

PROP. I. TEOR.

I poligoni simili iscritti ne' cerchi sono fra loro come i quadrati de' diametri.

Sieno i cerchi ABCDE, FGHKL (*fig.* 46.), ed in essi i poligoni simili ABCDE, FGHKL; ed i diametri de' cerchi sieno BM, GN. Dico come il quadrato di BM al quadrato di GN, così es-

sere il poligono ABCDE al poligono FGHKL.

Si congiungano le BE, AM, GL, FN. E poichè il poligono ABCDE è simile al poligono FGHKL, sarà l'angolo BAE uguale all'angolo GFL, e come la BA alla AE, così la GF alla FL (*def.* 1. *VI.*). Adunque sono due triangoli BAE, GFL che hanno un angolo uguale ad un angolo, cioè l'angolo BAE all'angolo GFL, e proporzionali i lati intorno agli angoli uguali; onde il triangolo ABE è equiangolo al triangolo GFL (*prop.* 6. *VI.*); e perciò l'angolo AEB è uguale all'angolo FLG; ma l'angolo AEB è uguale all'angolo AMB (*prop.* 21. *III.*), perchè sono nel medesimo segmento di cerchio, e l'angolo FLG è uguale all'angolo FNG; dunque l'angolo AMB è uguale all'angolo FNG; ed è l'angolo retto BAM uguale al retto GFN (*prop.* 31. *III.*), quindi il rimanente sarà uguale al rimanente; adunque il triangolo ABM è equiangolo al triangolo FGN; perciò come BM a GN, così BA a GF (*prop.* 4. *VI.*), e la ragion duplicata di BM a GN sarà la stessa che la duplicata di BA a GF. Ma il poligono ABCDE è al poligono FGHKL in duplicata ragione di BA a GF (*prop.* 20. *VI.*); adunque il poligono ABCDE è al poligono FGHKL in duplicata ragione di BM a GN, ossia come il quadrato di BM al quadrato di GN. Per la qual cosa i poligoni simili ec. C. B. D.

PROP. II. TEOR.

I cerchi sono fra loro come i quadrati de' diametri.

Siano i cerchi ABCD, EFGH (*fig.* 47.), ed i loro diametri siano BD, FH. Dico come il quadrato di BD al quadrato di FH, così essere il cerchio ABCD al cerchio EFGH.

Se non sia così, sarà come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD ad uno spazio o minore, o maggiore del cerchio EFGH: e suppongasi prima ad uno spazio minore, che sia S; e nel cerchio EFGH si descriva il quadrato EFGH. Il quadrato descritto nel cerchio è maggiore della metà del cerchio; perchè se pei punti E, F, G, H si tirino le tangenti al cerchio, sarà il quadrato EFGH la metà del quadrato descritto intorno al cerchio; ma il cerchio è minore del quadrato descritto intorno ad esso, dunque il quadrato EFGH è maggiore della metà del cerchio EFGH. Si seghino per mezzo le circonferenze EF, FG, GH, HE ne' punti K, L, M, N; e si congiungano le EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE: ciascuno de' triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è maggiore della metà del segmento del cerchio in cui egli consiste; poichè se pei punti K, L, M, N si conducano le tangenti al cerchio, e si compi-

scano i parallelogrammi che sono nelle linee rette EF, FG, GH, HE, ciascuno de' triangoli EKF, FLG, GMH, HNE sarà metà del parallelogrammo in cui è descritto (*prop.* 41 *I.*); ma il segmento è minore del parallelogrammo; adunque ciascuno de' triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è maggiore della metà del segmento circolare in cui egli consiste. Per la qual cosa segando per mezzo le altre circonferenze, congiungendo le linee rette, e ciò facendo sempre, resteranno finalmente de' segmenti di cerchio minori dell' eccesso, onde il cerchio EFGH supera lo spazio S, come è chiaro dal Lemma I. di questo libro. Siano dunque i segmenti EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE minori dell' eccesso, onde il cerchio EFGH supera lo spazio S; sarà il rimanente poligono EKFLGMHN maggiore dello spazio S. Descrivasi ancora nel cerchio ABGD il poligono AXBOCPDR simile al poligono EKFLGMHN; sarà dunque come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il poligono AXBOCPDR al poligono EKFLGMHN (*prop.* 1. *XII.*); ma come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD allo spazio S; adunque come il cerchio ABCD allo spazio S, così il poligono AXBOCPDR al poligono EKFLGMHN: è poi il cerchio ABCD maggiore del poligono descritto in esso; sicchè ancora lo spazio S sarà maggiore del poligono EKFLGMHN (*prop.* 14. *V.*), ma ne è minore, come

prima si è dimostrato, lo che non può essere. Laonde non è come il quadrato di BD al quadrato di FH; così il cerchio ABCD ad uno spazio minore del cerchio EFGH. Similmente dimostreremo non essere come il quadrato di FH al quadrato di BD, così il cerchio EFGH ad uno spazio minore del cerchio ABCD. Dico inoltre neanco essere come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD ad uno spazio maggiore del cerchio EFGH; perciocchè, se egli è possibile, sia ad uno spazio maggiore T: sarà invertendo, come il quadrato di FH al quadrato di BD, così lo spazio T al cerchio ABCD, oppure, come il quadrato di FH al quadrato di BD, così il cerchio EFGH, che è minore dello spazio T, ad uno spazio minore del cerchio ABCD, lo che si è dimostrato impossibile. Dunque non è come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD ad uno spazio maggiore del cerchio EFGH; e si è dimostrato nè anche essere ad uno spazio minore, onde come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD al cerchio EFGH. Per la qual cosa i cerchi sono tra loro come i quadrati de' diametri. C. B. D.

PROP. III. TEOR.

Ogni piramide, che ha la base triangolare, si divide in due piramidi uguali e simili fra loro, che hanno le basi triangolari, e simili a tutta; ed in due prismi uguali, che sono maggiori della metà di tutta la piramide.

Sia la piramide (*fig.* 48.) la cui base è il triangolo ABC, e 'l vertice il punto D. Dico la piramide ABCD dividersi in due piramidi uguali e simili fra loro, che hanno le basi triangolari, e simili a tutta, ed in due prismi uguali; ed essere i due prismi maggiori della metà di tutta la piramide.

Si seghino le AB, BC, CA, AD, DB, DC per metà ne' punti E, F, G, H, K, L; e si congiungano le EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG. E poichè la AE è uguale alla EB, e la AH alla HD, sarà la HE parallela alla DB (*prop.* 2. *VI.*); e per la medesima ragione la HK è parallela alla AB; è dunque HEBK parallelogrammo, onde la HK è uguale alla EB (*prop.* 34. *I.*): ma la EB è uguale alla AE, dunque la AE sarà uguale alla HK; ed è la AH uguale alla HD, sicchè le due EA, AH sono uguali alle due KH, HD, ciascuna a ciascuna, e l'angolo EAH uguale all'angolo

KHD (*prop.* 29. *I.*); adunque la base EH è uguale alla base KD, e 'l triangolo AEH uguale e simile al triangolo HKD (*prop.* 4. *I.*). Si dimostrerà similmente il triangolo AGH uguale e simile al triangolo HLD. Ora le due linee rette EH, HG che s'incontrano sono parallele alle due KD, DL che parimenti s'incontrano, ma non nel medesimo piano, esse conterranno angoli uguali (*prop.* 10. *XI.*); cioè l'angolo EHG è uguale all'angolo KDL. Di nuovo, poichè le due linee rette EH, HG sono uguali alle due KD, DL, ciascuna a ciascuna, e l'angolo EHG è uguale all'angolo KDL, sarà la base EG uguale alla base KL, e 'l triangolo EHG uguale e simile al triangolo KDL; e per la medesima ragione il triangolo AEG è uguale e simile al triangolo HKL. Per la qual cosa la piramide la cui base è il triangolo AEG, e 'l vertice il punto H, è uguale e simile alla piramide la cui base è il triangolo KHL, e 'l vertice il punto D. E perchè ad un lato del triangolo ADB, cioè al lato AB, si è condotta la parallela HK, sarà il triangolo ADB equiangolo al triangolo HDK, e perciò sono proporzionali i lati intorno agli angoli uguali (*prop.* 4. *VI.*); onde il triangolo ADB è simile al triangolo HDK; e per la medesima ragione il triangolo DBC è simile al triangolo DKL, il triangolo ADC al triangolo HDL, e finalmente il triangolo ABC al triangolo AEG: ma si è dimostrato il triangolo AEG essere si-

mile al triangolo HKL, dunque eziandio il triangolo ABC sarà simile al triangolo HKL. Laonde la piramide la cui base è il triangolo ABC, e'l vertice il punto D, è simile alla piramide, la cui base è il triangolo HKL, e'l vertice il punto D: ma la piramide la cui base è il triangolo HKL, e'l vertice il punto D, si è dimostrata simile alla piramide la cui base è il triangolo AEG, e'l vertice il punto H; dunque benanche la piramide la cui base è il triangolo ABC, e'l vertice il punto D, è simile alla piramide la cui base è il triangolo AEG, e'l vertice il punto H. Sicchè l'una e l'altra delle piramidi AEGH, HKLD è simile a tutta la piramide ABCD.

Essendo la BF uguale alla FC, sarà il parallelogrammo EBFG doppio del triangolo GFC (*prop.* 41. *I.*); ma se due prismi siano ugualmente alti, ed uno abbia per base un parallelogrammo, e l'altro un triangolo, e sia il parallelogrammo doppio del triangolo, tali prismi sono fra loro uguali (*prop.* 40. *XI.*); adunque il prisma contenuto da' due triangoli BKF, EHG e da' tre parallelogrammi EBFG, EBKH, KHGF è uguale al prisma contenuto da' due triangoli FGC, KHL e da' tre parallelogrammi FGHK, FCLK; GCLH; perciocchè sono ugualmente alti, essendo tra i piani paralleli ABC, HKL. Inoltre è manifesto essere ciascuno de' detti prismi maggiore di ciascuna delle pira-

midi, le cui basi sono i triangoli AEG, HKL, ed i vertici i punti H, D; poichè se congiungiamo la linea retta EF, il prisma la cui base è il parallelogrammo EBFG, e la linea retta HK ad esso opposta, è maggiore della piramide la cui base è il triangolo EBF, e 'l vertice il punto K; ma questa piramide è uguale alla piramide la cui base è il triangolo AEG, e 'l vertice il punto H (perchè amendue sono contenute da piani simili ed uguali); adunque il prisma la cui base è il parallelogrammo EBFG, e la linea retta HK opposta ad esso, è maggiore della piramide la cui base è il triangolo AEG, e 'l vertice il punto H. Ma il prisma la cui base è il parallelogrammo EBFG, e la linea retta HK opposta ad esso; è uguale al prisma la cui base è il triangolo FGC, ed il triangolo KHL opposto ad esso; e la piramide la cui base è il triangolo AEG, e 'l vertice il punto H, è uguale alla piramide la cui base è il triangolo HKL, e 'l vertice il punto D: adunque i due anzidetti prismi sono maggiori delle piramidi le cui basi sono i triangoli AEG, HKL, ed i vertici i punti H, D. Sicchè tutta la piramide ABCD si è divisa in due piramidi uguali e simili fra loro, e simili a tutta; ed in due prismi uguali, che sono maggiori della metà di tutta la piramide. C. B. D.

PROP. IV. TEOR.

Se due piramidi, che hanno le basi triangolari, siano ugualmente alte, e l'una e l'altra di loro si divida in due piramidi fra loro uguali, e simili alla tutta, ed in due prismi uguali, e l'una e l'altra delle fatte piramidi si divida nello stesso modo, e ciò si faccia sempre: saranno come la base di una piramide alla base dell'altra, così tutti i prismi che sono in una piramide a tutti i prismi che sono nell'altra uguali di numero.

Siano due piramidi (*fig.* 49.) ugualmente alte, e che abbiano le basi triangolari ABC, DEF, ed i vertici siano i punti G, H; e l'una e l'altra di loro si divida in due piramidi fra loro uguali e simili alla tutta, ed in due prismi uguali; e l'una e l'altra delle fatte piramidi si divida nello stesso modo, e ciò si faccia sempre. Dico come la base ABC alla base DEF, così essere tutti i prismi che sono nella piramide ABCG a tutti i prismi di numero uguali, che sono nella piramide DEFH.

Si faccia la medesima costruzione del teorema precedente; e poichè la BX è uguale alla XC, e la AL alla LC, sarà la XL parallela alla AB (*prop.* 2. *VI.*), e'l triangolo ABC simile al

triangolo LXC; e per la medesima ragione il triangolo DEF è simile al triangolo RVF. E perchè la BC è doppia della CX, e la EF della FV, sarà come la BC alla CX, così la EF alla FV: ma sulle BC, CX sono descritti i rettilinei simili e similmente posti ABC, LXC, e sulle EF, FV i rettilinei simili e similmente posti DEF, RVF; adunque come il triangolo ABC al triangolo LXC, così il triangolo DEF al triangolo RVF (*prop.* 22. *VI.*); e permutando, come il triangolo ABC al triangolo DEF, così il triangolo LXC al triangolo RVF. Ora essendo i piani ABC, OMN paralleli fra loro, non che i piani DEF, STY (*prop.* 15. *XI.*), le perpendicolari uguali che da' punti G, H si tirano alle basi ABC, DEF, saranno divise per metà, come sono divise per metà le rette GC, HF da' medesimi piani ne' punti N, Y: sicchè i prismi LXCOMN, RVFSTY sono ugualmente alti, e perciò come la base LXC alla base RVF, ovvero come il triangolo ABC al triangolo DEF, così il prisma LXCOMN al prisma RVFSTY. Ma i due prismi che sono nella piramide ABCG sono uguali fra loro, non che i due prismi che sono nella piramide DEFH; come dunque il prisma la cui base è il parallelogrammo KBXL, e la linea retta MO opposta ad esso, al prisma la cui base è il triangolo LXC, ed il triangolo OMN opposto ad esso, così il prisma la cui base è il parallelogrammo PEVR, e la linea retta

TS opposta ad esso, al prisma la cui base è il triangolo RVF, ed il triangolo STY oppposto ad esso: per la qual cosa componendo, come i prismi KBXLMO, LXCOMN al prisma LXC-OMN, così i prismi PEVRTS, RVFSTY al prisma RVFSTY; e permutando, come i prismi KBXLMO, LXCOMN ai prismi PEVRTS, RVF-STY, così il prisma LXCOMN al prisma RVF-STY; ma si è dimostrato come il prisma LXC-OMN al prisma RVFSTY, così essere la base ABC alla base DEF, adunque come la base ABC alla base DEF, così sono i due prismi contenuti nella piramide ABCG ai due prismi contenuti nella piramide DEFH. Similmente, se dividiamo nello stesso modo le fatte piramidi, come OMNG, STYH, sarà come la base OMN alla base STY, così i due prismi che sono nella piramide OMNG ai due prismi che sono nella piramide STYH; ma come la base OMN alla base STY, così la base ABC alla base DEF; adunque come la base ABC alla base DEF, così i due prismi che sono nella piramide ABCG ai due prismi che sono nella piramide DEFH, ed i due prismi che sono nella piramide OMNG ai due prismi che sono nella piramide STYH; ed i quattro ai quattro. Le medesime cose si dimostreranno de' prismi fatti dalla divisione delle piramidi AKLO, DPRS, e di tutti similmente di numero uguali. Sicchè se due piramidi ec. C. B. D.

PROP. V. TEOR.

Le piramidi che hanno la medesima altezza, e le basi triangolari, sono fra loro come le basi.

Siano della medesima altezza le piramidi ABCG, DEFH (*fig.* 50.), le cui basi siano i triangoli ABC, DEF, ed i vertici i punti G, H. Dico come la base ABC alla base DEF, così essere la piramide ABCG alla piramide DEFH.

Se non è così, sia come la base ABC alla base DEF, così la piramide ABCG ad un solido minore della piramide DEFH, o ad un solido maggiore; e sia prima ad un solido minore, che sia Q. Si divida la piramide DEFH, in due piramidi fra loro uguali, e simili alla tutta, ed in due prismi uguali; saranno i due prismi maggiori della metà di tutta la piramide (*prop.* 3.*XII*): di nuovo, si dividano le già fatte piramidi nel medesimo modo, e ciò si continui a fare fino a che rimangano nella piramide DEFH delle piramidi; le quali siano minori dell' eccesso onde la piramide DEFH supera il solido Q; e siano, per esempio, le piramidi DPRS, STYH; saranno i rimanenti prismi nella piramide DEFH maggiori del solido Q. Si divida la piramide ABCG similmente, ed in altrettante parti che la piramide DEFH; saranno dunque come la base

ABC alla base DEF, così i prismi che sono nella piramide ABCG ai prismi che sono nella piramide DEFH (*prop. prec.*); ma come la base ABC alla base DEF, così la piramide ABCG al solido Q, dunque come la piramide ABCG al solido Q, così i prismi che sono nella piramide ABCG a' prismi che sono nella piramide DEFH; è poi la piramide ABCG maggiore de' prismi che si contengono in essa; dunque ancora il solido Q sarà maggiore de' prismi che si contengono nella piramide DEFH: ma ne è minore, lo che è impossibile; non è dunque come la base ABC alla base DEF, così la piramide ABCG ad un solido minore della piramide DEFH; e dimostreremo similmente non essere come la base DEF alla base ABC, così la piramide DEFH ad un solido minore della piramide ABCG. Dico neanco essere come la base ABC alla base DEF, così la piramide ABCG ad un solido maggiore della piramide DEFH; perciocchè sia ad un solido maggiore, se egli è possibile, come al solido Z: sarà invertendo, come la base DEF alla base ABC, così il solido Z alla piramide ABCG; ma come il solido Z alla piramide ABCG, così la piramide DEFH, la quale è minore del solido Z, ad un solido minore della piramide ABCG: come dunque la base DEF alla base ABC, così la piramide DEFH ad un solido minore della piramide ABCG, che nel primo caso si è dimostrato

impossibile ; onde non è come la base ABC alla base DEF , così la piramide ABCG ad un solido maggiore della piramide DEFH : ma si è dimostrato non essere anche ad un solido minore ; adunque come la base ABC alla base DEF , così la piramide ABCG alla piramide DEFH. Sicchè le piramidi che hanno la medesima altezza ec. C. B. D.

PROP. VI. TEOR.

Le piramidi che hanno la medesima altezza , e le basi poligone , sono anche fra loro come le basi.

Siano le piramidi (*fig.* 51) che hanno la medesima altezza , e le basi poligone ABCDE, FGHKL, ed i vertici i punti M , N. Dico come la base ABCDE alla base FGHKL ; così essere la piramide ABCDEM alla piramide FGHKLN.

Si divida la base ABCDE ne' triangoli ABC , ACD , ADE ; e la base FGHKL ne' triangoli FGH , FHK , FKL ; ed intendansi in ciascuno de' triangoli innalzate delle piramidi in modo che il vertice comune di quelle che sono sopra le basi ABC , ACD , ADE sia il punto M , ed il vertice comune delle altre sia il punto N. Perciocchè come il triangolo ABC al triangolo FGH , così è la piramide ABCM alla piramide FGHN : e come il triangolo ACD al triangolo

FGH, così la piramide ACDM alla piramide FGHN; sarà come il trapezio ABCD al triangolo FGH, così la piramide ABCDM alla piramide FGHN (*prop.* 24. *V.*): ed essendo come il triangolo ADE al triangolo FGH, così la piramide AEDM alla piramide FGHN; sarà, per la citata proposizione, come il poligono ABCDE al triangolo FGH, così la piramide ABCDEM alla piramide FGHN. Similmente si dimostrerà essere il poligono FGHKL al triangolo FGH come la piramide FGHKLN alla piramide FGHN; ed invertendo, come il triangolo FGH al poligono FGHKL, così la piramide FGHN alla piramide FGHKLN. Per la qual cosa, essendo come la base ABCDE alla base FGH, così la piramide ABCDEM alla piramide FGHN; e come la base FGH alla base FGHKL, così la piramide FGHN alla piramide FGHKLN, sarà per egualità, come la base ABCDE alla base FGHKL, così la piramide ABCDEM alla piramide FGHKLN. Quindi se due piramidi ec. C. B. D.

PROP. VII. TEOR.

Ogni prisma che ha la base triangolare, si divide in tre piramidi uguali fra loro, e che hanno le basi triangolari.

Sia il prisma la cui base è il triangolo ABC (*fig.* 52.), e ad esso opposto il triangolo DEF.

Dico il prisma ABCDEF dividersi in tre piramidi fra loro uguali, e che hanno le basi triangolari.

Si congiungano le BD, EC, CD; e poichè ABED è un parallelogrammo di cui BD è il diametro, sarà il triangolo ABD uguale al triangolo EBD (*prop.* 34. *I.*); onde la piramide la cui base è il triangolo ABD, ed il vertice il punto C, è uguale alla piramide la cui base è il triangolo EBD, ed il vertice il punto C (*prop.* 5. *XII.*): ma la piramide la cui base è il triangolo EBD, ed il vertice il punto C, è la medesima che la piramide la cui base è il triangolo EBC, ed il vertice il punto D, perchè sono contenute da' medesimi piani: adunque ancora la piramide la cui base è il triangolo ABD, ed il vertice il punto C, è uguale alla piramide la cui base è il triangolo EBC, ed il vertice il punto D. Similmente, perchè FCBE è un parallelogrammo di cui CE è il diametro, sarà il triangolo ECF uguale al triangolo ECB; quindi eziandio la piramide la cui base è il triangolo ECB, ed il vertice il punto D, è uguale alla piramide la cui base è il triangolo ECF, ed il vertice il punto D: ma la piramide la cui base è il triangolo ECB, ed il vertice il punto D, si è dimostrata uguale alla piramide la cui base è il triangolo ABD, ed il vertice il punto C; sicchè ancora la piramide la cui base è il triangolo ECF, ed il ver-

tice il punto D, è uguale alla piramide la cui base è il triangolo ABD, ed il vertice il punto C. Laonde il prisma ABCDEF è diviso in tre piramidi fra loro uguali che hanno le basi triangolari, cioè nelle piramidi ABDC, EBDC, ECFD. C. B. D.

COR. I. La piramide la cui base è il triangolo ABD, ed il vertice il punto C, è la medesima che la piramide la cui base è il triangolo ABC, ed il vertice il punto D, perciocchè sono contenute da' medesimi piani: ma la piramide la cui base è il triangolo ABD, ed il vertice il punto C, si è dimostrata terza parte del prisma la cui base è il triangolo ABC, ed opposto ad esso il triangolo DEF; dunque eziandio la piramide la cui base è il triangolo ABC, ed il vertice il punto D, è terza parte del prisma la cui base è il triangolo ABC, ed opposto ad esso il triangolo DEF; cioè la piramide è terza parte del prisma che ha la medesima base triangolare, e l'altezza uguale.

COR. II. Se la base del prisma sia una qualunque altra figura rettilinea, il prisma si può sempre dividere in altri prismi che hanno le basi triangolari: perciò ogni piramide è terza parte del prisma che ha la medesima base, e l'altezza uguale.

COR. III. I prismi che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi; poichè le piramidi costituite sopra le medesime basi, e

della medesima altezza de' prismi sono fra loro come le basi (*prop.* 6. *XII.*).

PROP. VIII. TEOR.

Le piramidi simili che hanno le basi triangolari, sono fra loro in triplicata ragione de' lati omologhi.

Siano le piramidi simili e similmente poste (*fig.* 53.), le cui basi siano i triangoli ABC, DEF, ed i vertici i punti G, H. Dico la piramide ABCG essere alla piramide DEFH in ragione triplicata di quella che ha il lato BC all' omologo EF.

Si compiscano i parallelogrammi ABCM, GBCN, ABGK, ed il solido parallelepipedo BGML che si contiene da questi piani e dagli opposti ad essi: e similmente si compisca il solido parallelepipedo EHPO contenuto da' tre parallelogrammi DEFP, HEFR, DEHX, e dagli opposti ad essi. Perciocchè la piramide ABCG è simile alla piramide DEFH, sarà l' angolo ABC uguale all'angolo DEF (*def.* 11. *XI.*), l' angolo GBC uguale all' angolo HEF, e l' angolo ABG all' angolo DEH; e sarà come la AB alla BC, così la DE alla EF, cioè sono proporzionali i lati intorno agli angoli uguali; adunque il parallelogrammo BM è simile al parallelogrammo EP; e per la medesima ragione il parallelogrammo BN è si-

mile al parallelogrammo ER, e BK ad EX: sicchè i tre parallelogrammi BM, BN, BK, sono simili a' tre EP, ER, EX: ma i tre BM, BN, BK sono uguali e simili a' tre opposti (*prop.* 24. *XI*), ed i tre EP, ER, EX a' tre loro opposti sono ancora simili ed uguali; adunque i solidi BGML, EHPO sono contenuti da piani simili ed uguali di numero, ed i loro angoli solidi sono uguali (*prop. B. XI.*); e perciò il solido BGML è simile al solido EHPO (*def.* 11. *XI.*). Ora i solidi parallepipedi simili sono in ragione triplicata de'lati omologhi (*prop.* 33. *XI.*); dunque la ragione del solido BGML al solido EHPO è triplicata di quella che il lato BC serba al lato omologo EF: ma come il solido BGML al solido EHPO, così la piramide ABCG alla piramide DEFH (*prop.* 15. *V.*); perciocchè la piramide è sesta parte di detto solido, essendo il prisma, che è metà del parallelepipedo (*prop.*28.*XI.*), triplo della piramide (*prop. prec.*): adunque la piramide ABCG è alla piramide DEFH in ragione triplicata di quella che ha la BC alla EF. C. B. D.

SCOLIO.

Le piramidi simili a basi poligone sono pure in triplicata ragione de' lati omologhi.

Siano le piramidi simili e similmente poste (*fig.* 51.), le cui basi siano i poligoni ABCDE

FGHKL, ed i vertici i punti M, N: la piramide ABCDEM avrà alla piramide FGHKLN ragion triplicata di quella che il lato AB ha al lato omologo FG.

Perciocchè si dividano i poligoni ne' triangoli ABG, ACD, ADE, FGH, FHK, FKL, i quali saranno simili, ciascuno a ciascuno (*prop.*20.*VI.*); e perchè le piramidi sono simili, sarà il triangolo ABM simile al triangolo FGN (*def.* 11.*XI.*), e 'l triangolo BCM al triangolo GHN; adunque come la MA alla AB, così la NF alla FG; ma come la AB alla AC, così la FG alla FH, perchè sono simili i triangoli ABC, FGH; come dunque, per egualità, la MA è alla AC, così la NF alla FH. Similmente si dimostrerà la AC alla CM, come la FH alla HN; onde di nuovo per egualità, come la AM alla MC, così è la FN alla NH: laonde i triangoli AMC, FNH avendo proporzionali i lati, sono fra loro equiangoli e simili (*prop.* 5. *VI.*); quindi le piramidi le cui basi sono i triangoli ABC, FGH ed i vertici i punti M, N sono simili tra loro; perciocchè i loro angoli solidi sono uguali (*prop. B.XI.*), e sono contenute da piani simili ed uguali di numero. Col medesimo ragionamento si dimostrerà la piramide ACDM simile alla piramide FHKN, e la piramide AEDM alla piramide FKLM. Or poichè la piramide ABCM è simile alla piramide FGHN, ed hanno le basi triangolari, la piramide ABCM avrà alla piramide

FGHN ragion triplicata di quella che il lato AC ha al lato omologo FH; e per la medesima ragione la piramide ACDM alla piramide FHKN ha ragion triplicata di quella che ha il lato AC al lato omologo FH: come dunque la piramide ABCM alla piramide FGHN, così la piramide ACDM alla piramide FHKN; e per la medesima ragione, sarà come la piramide ACDM alla piramide FHKN, così la piramide ADEM alla piramide FKLN. Ed essendo come un antecedente al suo conseguente, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti (*prop.* 12. *V.*), sarà come la piramide ABCM alla piramide FGHN, così tutta la piramide ABCDEM a tutta la piramide FGHKLN; ma la piramide ABCM alla piramide FGHN è in ragion triplicata di quella che ha la AB alla FG: dunque tutta la piramide ha a tutta la piramide ragion triplicata di quella che il lato AB ha al lato omologo FG.

PROP. IX. TEOR.

Delle piramidi uguali, e che hanno le basi triangolari, le basi sono in ragion reciproca delle altezze: e quelle piramidi, che hanno le basi triangolari, e delle quali le basi sono in ragion reciproca delle altezze, sono uguali fra loro.

Siano le piramidi uguali (*fig.* 54.) che abbiano le basi triangolari ABC, DEF, ed i vertici i punti G, H. Dico le basi e le altezze delle piramidi ABCG, DEFH essere reciprocamente proporzionali; cioè come la base ABC alla base DEF, così l'altezza della piramide DEFH all'altezza della piramide ABCG.

Si compiscano i parallelogrammi AC, AG, GC, come ancora DF, DH, HF; e si compiscano i solidi parallelepipedi BGML, EHPO i quali sono contenuti da' detti piani, e dagli opposti ad essi. E poichè la piramide ABCG è uguale alla piramide DEFH, e della piramide ABCG è sestuplo il solido BGML, e della piramide DEFH è sestuplo il solido EHPO; sarà il solido BGML uguale al solido EHPO: ma le basi e le altezze de' solidi parallelepipedi uguali sono reciprocamente proporzionali (*prop.* 34. *XI.*); adunque come la base BM alla base EP, così l'altezza del solido EHPO all'altezza del solido BGML:

ma come la base BM alla base EP, così il triangolo ABC al triangolo DEF; come dunque il triangolo ABC al triangolo DEF, così l'altezza del solido EHPO all'altezza del solido BGML; è però l'altezza del solido EHPO la medesima che l'altezza della piramide DEFH, e l'altezza del solido BGML è la medesima che l'altezza della piramide ABCG; adunque, come la base ABC alla base DEF, così l'altezza della piramide DEFH è all'altezza della piramide ABCG. Sicchè le basi e le altezze delle piramidi ABCG, DEFH sono reciprocamente proporzionali.

Ma siano delle piramidi ABCG, DEFH le basi e le altezze reciprocamente proporzionali, cioè come la base ABC alla base DEF, così l'altezza della piramide DEFH all'altezza della piramide ABCG: dico la piramide ABCG essere uguale alla piramide DEFH.

Fatta la stessa costruzione, poichè come la base ABC alla base DEF, così l'altezza della piramide DEFH è all'altezza della piramide ABCG; ma come la base ABC alla base DEF, così il parallelogrammo BM al parallelogrammo EP; sarà dunque come il parallelogrammo BM al parallelogrammo EP, così l'altezza della piramide DEFH all'altezza della piramide ABCG. Or l'altezza della piramide DEFH è la medesima che l'allezza del solido parallelepipedo EHOP, e l'altezza della piramide ABCG è la medesima che l'altezza del solido parallelepi-

pedo BGML; onde come la base BM alla base EP, così l'altezza del solido parallelepipedo EHPO all'altezza del solido parallelepipedo BGML. Ma i solidi parallelepipedi le cui basi sono in ragion reciproca delle altezze, sono uguali fra loro; adunque il solido parallelepipedo BGML è uguale al solido parallelepipedo EHPO: ma la piramide ABCG è sesta parte del solido BGML; e del solido EHPO è sesta parte la piramide DEFH, adunque la piramide ABCG è uguale alla piramide DEFH. Sicchè delle piramidi uguali ec. C. B. D.

PROP. X. TEOR.

Ogni cono è la terza parte del cilindro, che ha la medesima base ed uguale altezza.

Abbia il cono la medesima base che il cilindro (*fig.* 55.), cioè il cerchio ABCD, e l'altezza uguale. Dico il cono essere la terza parte del cilindro: ossia il cilindro essere triplo del cono.

Perciocchè se il cilindro non sia triplo del cono, o sarà maggiore del triplo, o minore. Sia prima maggior del triplo; e si descriva nel cerchio ABCD il quadrato ABCD, che sarà maggiore della metà del cerchio; e dal quadrato ABCD elevisi un prisma così alto come il cilindro; sarà questo prisma maggiore della metà

del cilindro. Imperciocchè se intorno al cerchio ABCD si descriva il quadrato, e da esso si elevi un prisma così alto come il cilindro, il prisma fatto sul quadrato ABCD è al prisma fatto sul quadrato che intorno al cerchio ABCD si descrive, come il quadrato iscritto nel cerchio al quadrato circoscritto (*prop.* 32. *XI.*); ma il quadrato iscritto al cerchio è metà del quadrato circoscritto; dunque il prisma fatto sul quadrato ABCD è metà del prisma fatto sul quadrato che intorno al cerchio ABCD si descrive. Per la qual cosa, essendo il cilindro minore del prisma eretto sul quadrato che si descrive intorno al cerchio ABCD, sarà il prisma eretto sul quadrato ABCD così alto come il cilindro maggiore della metà del cilindro. Si seghino per mezzo le circonferenze AB, BC, CD, DA nei punti E, F, G, H, e si congiungano le AE, EB, BF, FC, CC, GD, DH, HA; ciascuno de' triangoli AEB, BFC CGD, DHA è maggiore della metà della porzione del cerchio ABCD, nella quale egli consiste, come si è dimostrato nella proposizione 2. di questo libro. Si elevino da ciascuno de' triangoli AEB, BFC, CGD, DHA i prismi ugualmente alti che il cilindro; sarà ciascuno di questi prismi maggiore della metà della porzione del cilindro, che è intorno ad esso; perciocchè se pei punti E, F, G, H si tirino le parallele alle AB, BC, CD, DA, e su di queste si compiscano i parallelogrammi, dai quali si elevano i solidi

parallelepipedi alti come il cilindro; di ciascuno di tali solidi saranno metà i prismi, che sono sopra i triangoli AEB, BFC, CGD, DHA: ma le porzioni del cilindro sono minori de' solidi parallelepipedi; adunque i prismi che sono sopra i triangoli AEB, BFC, CGD, DHA sono maggiori della metà delle porzioni del cilindro, che sono intorno ad essi. Quindi segando per mezzo le rimanenti circonferenze, congiungendo le linee rette, ed elevando sopra ciascun triangolo de' prismi alti come il cilindro, e ciò facendo sempre, si otterranno finalmente, giusta il Lemma I., alcune porzioni del cilindro che saranno minori dell' eccesso, onde il cilindro supera il triplo del cono. Tali porzioni del cilindro siano quelle che sono sopra i segmenti del cerchio AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA: adunque il rimanente prisma la cui base è il poligono AEBFCGDH, e la medesima altezza del cilindro è maggiore che il triplo del cono: ma questo prisma è triplo della piramide la cui base è il poligono AEBFCGDH, ed il medesimo vertice del cono (*cor.* 2. *prop.* 7. *XII.*); adunque la piramide la cui base è il poligono AEBFCGDH, ed il medesimo vertice del cono, è maggiore del cono che ha per base il cerchio ABCD; ma ne è minore, essendo compresa da essa, lo che è impossibile: non è dunque il cilindro maggiore del triplo del cono. Dico neanco essere il cilindro minore del triplo del cono, poichè, se egli è possibile, sia il ci-

lindro minore del triplo del cono; sarà, invertendo, il cono maggiore della terza parte del cilindro: si descriva nel cerchio ABCD il quadrato ABCD, il quale sarà maggiore della metà del cerchio; e dal quadrato ABCD si elevi una piramide che abbia il medesimo vertice del cono; sarà una tal piramide maggiore che la metà del cono: perciocchè, come qui innanzi abbiamo dimostrato, se intorno al cerchio si descriva il quadrato, e sui quadrati si elevino i solidi parallelepipedi alti come il cono, i quali si chiamano anche prismi, sarà il prisma che si eleva sul quadrato ABCD metà del prisma che si eleva sul quadrato descritto intorno al cerchio, perchè sono fra loro come le basi (*prop.* 32. *XI.*), onde eziandio le terze parti di essi; cioè la piramide la cui base è il quadrato ABCD, ed il vertice quello del cono, è metà della piramide la cui base è il quadrato descritto intorno al cerchio; ed il vertice quello del cono: ma la piramide eretta dal quadrato descritto intorno al cerchio è maggiore del cono, perchè lo comprende; adunque la piramide la cui base è il quadrato ABCD, ed il vertice quello del cono, è maggiore che la metà del cono. Si seghino per mezzo le circonferenze AB, BC, CD, DA nei punti E, F, G, H; e si congiungano le AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; sarà ciascuno de' triangoli AEB, BFC, CGD, DHA maggiore che la metà della porzione del cerchio, nella

quale egli consiste; si elevino da ciascun triangolo le piramidi che abbiano il medesimo vertice del cono. Laonde ciascuna di siffatte piramidi è maggiore che la metà della porzione del cono, che è in essa, il che si potrà dimostrare nello stesso modo che si dimostrò de' prismi e de' segmenti del cilindro. Quindi segando per mezzo le altre circonferenze, congiungendo le linee rette, ed elevando sopra ciascuno de' triangoli delle piramidi del medesimo vertice del cono, e ciò facendo sempre, si otterranno finalmente alcune porzioni del cono minori dell' eccesso onde il cono supera la terza parte del cilindro. Tali porzioni siano quelle che sono sopra i segmenti del cerchio AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; adunque la rimanente piramide la cui base è il poligono AEBFCGDH, ed il vertice quello del cono, è maggiore che la terza parte del cilindro: ma la piramide la cui base è il poligono AEBFCGDH, ed il vertice quello del cono, è la terza parte del prisma la cui base è anche il poligono AEBFCGDH, e l' altezza quella del cilindro; adunque il prisma la cui base è il poligono AEBFCGDH, e l' altezza quella del cilindro, è maggiore del cilindro che ha per base il cerchio ABCD; ma è minore, perchè da esso è compreso, lo che non può essere; non è dunque il cilindro minore che il triplo del cono; e si è dimostrato il cilindro neanco essere maggiore che il triplo del cono: laonde il

cilindro è triplo del cono, ossia il cono è terza parte del cilindro. Sicchè ogni cono è la terza parte ec. C. B. D.

PROP. XI. TEOR.

I coni ed i cilindri che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi.

Siano della medesima altezza (*fig*.56.) i coni ed i cilindri, le cui basi siano i cerchi ABCD, EFGH, gli assi le KL, MN, ed i diametri delle basi le AC, EG. Dico come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così essere il cono AL al cono EN.

Perciocchè se non sia così, sarà come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL ad un solido minore del cono EN, o ad un maggiore: sia prima ad un solido minore che sia X; e l'eccesso del cono EN sul solido X sia il solido Z: adunque il cono EN è uguale ai solidi X, Z. Si descriva nel cerchio EFGH il quadrato EFGH, il quale sarà maggiore della metà del cerchio; e dal quadrato EFGH si elevi la piramide col medesimo vertice del cono; la piramide eretta è maggiore che la metà del cono. Imperciocchè se descriviamo intorno al cerchio un quadrato, e da esso eleviamo una piramide col medesimo vertice del cono, la piramide inscritta sarà la metà della circoscritta, perchè sono tra loro come le basi (*prop*. 6. *XI*).

ma il cono è minore della piramide circoscritta adunque la piramide la cui base è il quadrato EFGH, ed il vertice quello del cono, è maggiore della metà del cono. Si seghino per mezzo le circonferenze EF, FG, GH, HE nei punti O, P, R, S; e si congiungano le EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE: onde ciascuno de' triangoli EOF, FPG, GRH, HSE è maggiore che la metà del segmento di cerchio in cui egli consiste. Si elevi da ciascun triangolo una piramide col medesimo vertice del cono; sarà ciascuna delle piramidi erette maggiore che la metà della porzione del cono, che è in essa. Quindi segando per mezzo le altre circonferenze, congiungendo le linee rette ed elevando sopra ciascun triangolo delle piramidi che abbiano il medesimo vertice del cono, e ciò facendo sempre, si otterranno finalmente alcune porzioni del cono minori del solido Z; le quali porzioni del cono siano quelle che sono sopra i segmenti circolari EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE; adunque la rimanente piramide la cui base è il poligono EOFPGRHS, ed il medesimo vertice del cono, è maggiore del solido X. Si descriva nel cerchio ABCD il poligono ATBYCVDQ simile al poligono EOFPGRHS; e da esso si elevi una piramide che abbia il medesimo vertice che il cono AL. E poichè come il quadrato di AC al quadrato di EG, così il poligono ATBYCVDQ al poligono EOFPGRHS (*prop.* 1. *XI*,); ma co-

me il quadrato di AC al quadrato di EG, così il cerchio ABCD al cerchio EFGH (*prop.* 2. *XII.*); come dunque il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il poligono ATBYCVDQ al poligono EOFPGRHS; ma come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL al solido X; e come il poligono ATBYCVDQ al poligono EOFPGRHS, così la piramide la cui base è il poligono ATBYCVDQ, ed il vertice il punto L, alla piramide la cui base è il poligono EOFPGRHS, ed il vertice il punto N (*prop.* 6 *XII.*); adunque come il cono AL al solido X, così la piramide la cui base è il poligono ATBYCVDQ, ed il vertice il punto L, alla piramide la cui base è il poligono EOFPGRHS, ed il vertice il punto N. Ora il cono AL è maggiore della piramide che è in esso; dunque il solido X è maggiore della piramide che è nel cono EN (*prop.* 14. *V.*): ma è minore, lo che è assurdo; non è dunque il cerchio ABCD al cerchio EFGH come il cono AL ad un solido minore del cono EN. Similmente si dimostrerà non essere il cerchio EFGH al cerchio ABCD come il cono EN ad un solido minore del cono AL. Dico inoltre neanco essere come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL ad un solido maggiore del cono EN. Perciocchè, se egli è possibile, sia al solido maggiore I; adunque, invertendo, sarà come il cerchio EFGH al cerchio ABCD, così il solido I al cono AL; ma come il solido I al cono AL,

così il cono EN, che è minore del solido I, ad un solido minore del cono AL; onde come il cerchio EFGH al cerchio ABCD, così il cono EN ad un solido minore del cono AL; lo che non può essere, come quì innanzi si è dimostrato: non è dunque come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL ad un solido maggiore del cono EN; ma si è dimostrato nè tampoco essere ad un solido minore: laonde come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL al cono EN. Ed essendo come il cono al cono, così il cilindro, al cilindro, poichè ogni cilindro è triplo del cono con cui ha la medesima base e la medesima altezza (*prop.* 10 *XII.*); dunque benanche come il cerchio ABCD è al cerchio EFGH, così sono i cilindri di uguali altezze costituiti su di essi. Sicchè i coni ed i cilindri che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi. C. B. D.

PROP. XII. TEOR.

I coni ed i cilindri simili sono fra loro in ragion triplicata de' diametri delle basi.

Siano simili i coni ed i cilindri (*fig.* 57.), de' quali le basi siano i cerchi ABCD, EFGH, i diametri delle basi le AC, EG, e gli assi de' coni o de' cilindri le KL, MN. Dico il cono la cui base è il cerchio ABCD, ed il vertice il punto L, essere

al cono la cui base è il cerchio EFGH, ed il vertice il punto N, in triplicata ragione di AC ad EG.

Imperciocchè se il cono ABCDL non è al cono EFGHN in ragion triplicata di AC ad EG, sarà il cono ABCDL ad un solido minore, o ad un maggiore del cono EFGHN in ragion triplicata di AC ad EG; e sia primieramente ad un solido minore X. Fatta la medesima costruzione che nel teorema precedente, si dimostrerà la piramide la cui base è il poligono EOFPGRHS, ed il vertice il punto N, essere maggiore del solido X: si descriva ancora nel cerchio ABCD il poligono ATBYCVDQ simile al poligono EOFPGRHS, e sopra di esso si costruisca una piramide che abbia il medesimo vertice che il cono; e sia LAQ uno de' triangoli che contengono la piramide ATBYCVDQL, ed NES uno de' triangoli che contengono la piramide EOFPGRHSN; e si congiungano le KQ, MS. E poichè il cono ABCDL è simile al cono EFGHN, sarà come AC ad EG, così l'asse KL all'asse MN (*def.* 24. *XI.*); ma come AC ad EG, così AK ad EM (*prop.* 15. *V.*); dunque come AK ad EM, così KL ad MN, e permutando, come AK a KL, così EM ad MN: ma gli angoli AKL, EMN sono uguali, essendo retti, adunque il triangolo AKL è simile al triangolo EMN (*prop.* 6. *VI.*). Similmente, essendo come AK a KQ, così EM ad MS, ed intorno agli angoli uguali AKQ, EMS (perciocc-

chè qual parte è l'angolo AKQ di quattro retti, che sono al centro K, tal parte è l'angolo EMS di quattro retti, che sono al centro M), sarà il triangolo AKQ simile al triangolo EMS. Or poichè si è dimostrato essere come AK a KL, così EM ad MN; ed è AK uguale a KQ, ed EM ad MS, sarà come QK a KL, così SM ad MN; adunque intorno agli angoli uguali QKL, SMN, dico uguali, perchè son retti, i lati sono proporzionali; laonde il triangolo LKQ è simile al triangolo NMS. E poichè per la somiglianza de' triangoli AKL, EMN, è come LA ad AK, così NE ad EM; e per la somiglianza de' triangoli KAQ, MES, come KA ad AQ, così ME ad ES, sarà, per ugualità, LA ad AQ come NE ad ES. Di nuovo, poichè per la simiglianza de' triangoli LQK, NSM, come LQ è a QK, così NS a SM; e per la somiglianza de' triangoli KAQ, MES, come QK a QA, così MS ad SE, sarà, per ugualità, come LQ a QA, così NS a SE: ma si è dimostrato QA ad AL come SE ad NE; adunque di nuovo, per egualità, sarà come QL ad LA, così SN ad NE: sicchè i lati de' triangoli LQA, NSE sono proporzionali, e perciò i triangoli LQA, NSE sono equiangoli e simili fra loro: laonde la piramide la cui base è il triangolo AQK, ed il vertice il punto L, è simile alla piramide la cui base è il triangolo EMS, ed il vertice il punto N; perciocchè hanno gli angoli solidi uguali, e so-

no contenute da piani simili ed uguali di numero. Ma le piramidi simili, e che hanno le basi triangolari, sono fra loro in triplicata ragione de'lati omologhi (*prop*. 8. *XII*.); adunque la piramide AKQL ha alla piramide EMSN ragion triplicata di quella che ha AK ad EM. Similmente dai punti D, V, C, Y, B, T al punto K, e dai punti H, R, G, P, F, O al punto M, tirando le linee rette, e sopra i triangoli dirizzando le piramidi che abbiano i medesimi vertici dei coni, dimostreremo ciascuna piramide essere a ciascuna del medesimo ordine in ragion triplicata del lato AK al lato omologo EM, cioè di AC ad EG: ma come un antecedente al suo conseguente, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti presi insieme; come dunque è la piramide AKQL alla piramide EMSN, così tutta la piramide la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e'l vertice il punto L, a tutta la piramide la cui base è il poligono EOFPGRHS, e 'l vertice il punto N; e perciò anche la piramide la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e 'l vertice il punto L, è alla piramide la cui base è il poligono EOFPGRHS, e 'l vertice il punto N, in triplicata ragione di AC ad EG: ma si è supposto il cono ABCDL essere al solido X in triplicata ragione di AC ad EG; adunque come il cono ABCDL al solido X, così la piramide la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e 'l vertice il punto L, alla piramide la cui base è il poli-

gono EOFPGRHS, e 'l vertice il punto N; ma detto cono è maggiore della piramide che è in esso, perchè la comprende, adunque il solido X è maggiore della piramide la cui base è il poligono EOFPGRHS, ed il vertice il punto N (*prop.* 14. *V.*); ma è minore, lo che è assurdo: non è dunque il cono ABCDL ad un solido minore del cono EFGHN in ragion triplicata di AC ad EG. Si dimostrerà parimente non essere il cono EFGHN ad un solido minore del cono ABCDL in ragion triplicata di EG ad AC. Dico neanco il cono ABCDL essere ad un solido maggiore del cono EFGHN in ragion triplicata di AC ad EG; perciocchè, se egli è possibile, sia ad un solido maggiore Z: invertendo, sarà il solido Z al cono ABCDL in triplicata ragione di EG ad AC; ma come il solido Z al cono ABCDL, così il cono EFGHN, il quale è minore del solido Z, ad un solido che sarà minore del cono ABCDL; adunque il cono EFGHN avrà ad un solido minore del cono ABCDL triplicata ragione di quella che ha il diametro EG al diametro AC, lo che si è dimostrato impossibile. Sicchè non è il cono ABCDL ad un solido maggiore del cono EFGHN in ragion triplicata di AC ad EG; e nè tampoco ad un minore: laonde il cono ABCDL è al cono EFGHN in triplicata ragione del diametro AC al diametro EG. Ma sta il cono al cono come il cilindro al cilindro; perciocchè ogni cono è terza

parte del cilindro con cui ha la medesima base, e la medesima altezza (*prop.* 10. *XII.*); adunque eziandio il cilindro è al cilindro simile in ragion triplicata di AC ad EG. Quindi i coni ed i cilindri simili sono fra loro in triplicata ragione de' diametri delle basi. C. B. D.

PROP. XIII. TEOR.

Se il cilindro sia segato da un piano parallelo ai piani opposti, sarà come il cilindro al cilindro, così l'asse all'asse.

Sia il cilindro AD (*fig.* 58.) segato dal piano GH parallelo ai piani opposti AB, CD, ed incontri l'asse EF nel punto K, e la linea GH sia la comune sezione del piano GH e della superficie del cilindro AD: e sia AEFC il parallelogrammo rettangolo dalla cui rivoluzione intorno la retta EF si descrive il cilindro AD, e la retta GK sia la comune sezione del piano GH e del detto rettangolo AEFC. Perciocchè i piani paralleli AB, GH sono segati dal piano AEKG, saranno le comuni sezioni AE, GK parallele fra loro (*prop.* 16. *XI.*); adunque AK è parallelogrammo, e perciò la KG è uguale alla EA la quale è tirata dal centro E del cerchio AB: e similmente si dimostrerà tutte le rette, che dal punto K si conducono alla linea GH, essere uguali a quelle che si tirano dal centro

alla circonferenza del cerchio AB; per la qual cosa sono tutte fra loro uguali, e quindi la linea GH è la circonferenza del cerchio il cui centro è il punto K. Laonde il piano GH divide il cilindro AD ne' cilindri AH, GD; i quali sono quegl' istessi che si descriverebbero dalla rivoluzione de' parallelogrammi AK, GF intorno le linee rette EK, KF. Dico pertanto come il cilindro AH al cilindro HC, così essere l' asse EK all' asse KF.

Si prolunghi l' asse EF dall' una e dall' altra parte verso i punti L, M; e si pongano uguali all' asse EK quante rette si vogliano EN, NL; e all' asse FK quante altre se ne vogliano FX, XM; e pe' punti L, N, X, M si conducano, i piani paralleli ai piani AB, CD: adunque, come si è dimostrato del piano GH, così si dimostrerà le comuni sezioni di que' piani e della superficie del cilindro prolungata essere altrettanti cerchi, i centri de' quali sono i punti L, N, X, M, e detti piani taglieranno i cilindri PR, RB, DT, DQ. Or poichè gli assi LN, NE, EK sono fra loro uguali, saranno i cilindri PR, RB, BG come le basi (*prop.* 11. *XII.*); ma le basi sono uguali; adunque eziandio i cilindri PR, RB, BG sono uguali fra loro; e perciò quanto l' asse KL è moltiplice dell' asse KE, tanto il cilindro PG è multiplice del cilindro GB: e per la medesima ragione quanto l' asse MK è multiplice dell' asse KF, tanto il cilindro QG è

multiplice del cilindro GD. Or se l'asse KL sia uguale all'asse KM, sarà ancora il cilindro PG uguale al cilindro GQ; se poi l'asse KL sia maggiore dell'asse KM, sarà il cilindro PG maggiore del cilindro GQ; e se minore, minore. Laonde sono quattro grandezze gli assi EK, KF ed i cilindri BG, GD, cosicchè, essendosi presi gli ugualmente multiplici dell'asse EK e del cilindro BG, cioè l'asse KL ed il cilindro PG; e gli ugualmente multiplici dell'asse KF e del cilindro GD, cioè l'asse KM ed il cilindro GQ, si è dimostrato che se l'asse KL superi l'asse KM, il cilindro PG supera il cilindro GQ; e se sia uguale, è uguale; e se minore, minore: adunque come l'asse EK è all'asse KF, così il cilindro BG al cilindro GD. Per la qual cosa se il cilindro sia segato ad un piano ec. C. B. D.

PROP. XIV. TEOR.

I coni ed i cilindri che hanno le basi uguali, sono fra loro come le altezze.

Siano nelle uguali basi AB, CD (*fig.* 59.) i cilindri EB, FD. Dico come il cilindro EB al cilindro FD, così essere l'asse GH all'asse KL.

Si prolunghi l'asse KL al punto N, e si ponga la LN uguale all'asse GH; ed intorno all'asse LN intendasi il cilindro GM. Perchè dunque

i cilindri EB, CM hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi (*prop.* 11. *XII.*); ma le basi sono uguali, adunque i cilindri EB, CM saranno uguali fra loro. E poichè il cilindro FM è segato dal piano CD parallelo ai piani opposti, sarà come il cilindro CM al cilindro FD, così l'asse LN all'asse KL (*propr. prec.*): è poi il cilindro CM uguale al cilindro EB, e l'asse LN all'asse GH; adunque come il cilindro EB è al cilindro FD, così l'asse GH all'asse KL. Ma come il cilindro EB al cilindro FD, così il cono ABG al cono CDK, perciocchè i cilindri sono tripli dei coni (*prop.* 10. *XII.*); adunque come l'asse GH all'asse KL, così il cono ABG al cono CDK, ed il cilindro EB al cilindro FD. Laonde i coni ed i cilindri che hanno le basi uguali ec. C. B. D.

PROP. XV. TEOR.

I coni ed i cilindri uguali hanno le basi in ragion reciproca delle altezze; e quei coni e cilindri, che hanno le basi in ragion reciproca delle altezze, sono uguali fra loro.

Siano uguali i coni ed i cilindri (*fig.* 60.), che hanno per basi i cerchi ABCD, EFGH, per diametri delle basi le AC, EG, e per assi le KL, MN, che sono ancora le altezze de' coni o de' cilindri; e compiscansi i coni ALC, ENG, ed i cilindri AX,

EO. Dico le basi dei cilindri AX, EO essere reciprocamente proporzionali alle altezze, cioè, come la base ABCD alla base EFGH, così essere l'altezza MN all'altezza KL.

L'altezza KL o è uguale all'altezza MN, o disuguale; e sia prima uguale. Perciocchè il cilindro AX è uguale al cilindro EO; ed i coni e cilindri, che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi, sarà la base ABCD uguale alla base EFGH; onde come la base ABCD alla base EFGH, così l'altezza MN all'altezza KL. Ma non sia l'altezza KL uguale all'altezza MN, e la MN sia maggiore, e si tagli dalla MN la MP uguale all'altezza KL e per P sia segato il cilindro EO dal piano TYS parallelo ai piani opposti EFGH, RO; sarà cerchio la comune sezione del piano TYS e della superficie del cilindro EO, e sarà ES cilindro la cui base è il cerchio EFGH, e l'altezza MP. Ora essendo il cilindro AX uguale al cilindro EO, sarà come il cilindro AX al cilindro ES, così il cilindro EO al cilindro ES (*prop.* 7. *V.*); ma come il cilindro AX al cilindro ES, così la base ABCD alla base EFGH (*prop.* 11. *XII.*); e come il cilindro EO al cilindro ES, così l'altezza MN all'altezza MP (*prop.* 14. *XII.*), perciocchè il cilindro EO viene segato dal piano TYS parallelo ai piani opposti: adunque come la base ABCD alla base EFGH, così l'altezza MN all'altezza MP; ed è l'altezza MP uguale

all' altezza KL ; onde come la base ABCD alla base EFGH, così l' altezza MN all' altezza KL. Sicchè le basi de' cilindri uguali AX, EO sono reciprocamente proporzionali alle altezze.

Inoltre, siano le basi de' cilindri AX, EO reciprocamente proporzionali alle altezze, cioè sia come la base ABCD alla base EFGH, così l' altezza MN all' altezza KL. Dico il cilindro AX essere uguale al cilindro EO.

Sia primieramente la base ABCD uguale alla base EFGH ; e poichè come la base ABCD alla base EFGH, così l' altezza MN all' altezza KL sarà la MN uguale alla KL, e quindi il cilindro AX uguale al cilindro EO. Ma non sia la base ABCD uguale alla base EFGH, e sia ABCD maggiore : e perchè come la base ABCD alla base EFGH, così, l' altezza MN all' altezza KL, sarà la MN maggiore della KL. Or fatta la medesima costruzione che nel caso precedente, poichè come la base ABCD alla base EFGH così l' altezza MN all' altezza KL, o alla sua uguale MP ; e come la base ABCD alla base EFGH, così il cilindro AX al cilindro ES, perciocchè hanno la medesima altezza (*prop.* 11 *XII.*); e come l' altezza MN all' altezza MP ossia KL, così il cilindro EO al cilindro ES ; sicchè come il cilindro AX al cilindro ES, così il cilindro EO al cilindro ES ; per la qual cosa il cilindro AX è uguale al cilindro EO : e similmente si può dimostrare de' coni. C. B. D.

PROP. XVI. PROB.

Dati due cerchi d' intorno al medesimo centro, descrivere nel maggiore un poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocchi il cerchio minore.

Siano dati i due cerchi ABCD, EFGH (*fig*.61.) intorno al medesimo centro K: fa d' uopo nel cerchio maggiore descrivere un poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocchi il cerchio minore.

Si conduca pel centro K la linea retta BD, e dal punto G, ove ne incontra la circonferenza del cerchio, le si tiri la perpendicolare GA, la quale si prolunghi in C; sarà la AC tangente al cerchio EFGH (*prop.* 16. *III.*). Pertanto si seghi la circonferenza del cerchio in due parti uguali, e di nuovo la di lei metà si seghi in due parti uguali, e questo si faccia sempre, fino a che si giunga ad una circonferenza minore della AD (*Lemma I.*), la quale sia LD; e dal punto L si tiri alla BD la perpendicolare LM, la quale si prolunghi fino al punto N; e si congiungano le LD, DN. È chiaro dalla prop. 3. del lib. III. e dalla 4 del I essere la LD uguale alla DN. E poichè la LN è parallela alla AC, e la AC tocca il cerchio EFGH; la linea retta LN non toccherà il cerchio EFGH;

e molto meno toccheranno il cerchio EFGH le linee rette LD, DN. Laonde adattando nel cerchio ABCD linee rette uguali alla LD, si descriverà in esso un poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocca il cerchio minore. C. B. F.

LEMMA II.

Se due trapezii ABCD, EFGH (fig. 62.) sieno inscritti ne' cerchi i cui centri siano i punti K, L, e sieno i lati AB, DC come ancora EF, HG paralleli, ed i rimanenti quattro lati AD, BC, EH, FG uguali fra loro; ed oltre a ciò il lato AB sia maggiore del lato EF, e il lato DC maggiore del lato HG: sarà il raggio del cerchio in cui sono i lati maggiori, maggiore del raggio dell' altro cerchio.

Perciocchè, se egli è possibile, non sia la retta KA maggiore della LE; sarà dunque la KA, o uguale alla LE, o minore; e siale prima uguale. Essendo ne' cerchi uguali le rette AD, BC uguali alle rette EH, FG, saranno ancora le circonferenze AD, BC uguali alle circonferenze EH, FG (*prop.* 28 *III.*); ed essendo le rette AB, DC maggiori delle rette EF, HG, ciascuna di ciascuna, ancora le circonferenze AB, DC saranno maggiori delle circonfe-

renze EF, HG. Adunque tutta la circonferenza ABCD è maggiore di tutta EFGH; ma l'è uguale, lo che non può essere; non è dunque la retta KA uguale alla retta LE.

Inoltre, sia la KA minore della LE, e si ponga la LM uguale alla KA, e col centro L, intervallo LM, si descriva il cerchio MNOP, il quale incontri le congiunte LF, LG, LH, EL ne' punti N, O, P, M; e si uniscano le MN, NO, OP, PM, le quali saranno parallele alle EF, FG, GH, HE (*prop.* 2. *XI.*), e minor di esse, ciascuna di ciascuna. E poichè la EH è maggiore della MP, sarà anche la AD maggiore della MP; ma sono uguali i cerchi ABCD, MNOP, adunque la circonferenza AD è maggiore della circonferenza MP; e per la medesima ragione la circonferenza BC è maggiore dell' altra NO. E poichè la retta AB è maggiore della retta EF, la quale è maggiore della MN, sarà la AB molto maggiore della MN, onde la circonferenza AB è maggiore della circonferenza MN; e per la medesima ragione la circonferenza DC è maggiore dall' altra PO. Adunque tutta la circonfenza ABCD è maggiore di tutta MNOP, ma l'è uguale, lo che è assurdo: laonde la retta KA non è minore della LE, e nè tampoco uguale; e perciò la retta KA e necessariamente maggiore della retta LE. C. B. D.

COR. Che se sia un triangolo isoscele, i cui lati siano uguali alle rette AD, BC, e la di lui base

sia minore della retta AB, che è la maggiore delle due AB, DC; si dimostrerà similmente la retta KA essere maggiore del raggio del cerchio descritto intorno al triangolo.

PROP. XVII. PROB.

Essendo due sfere intorno al medesimo centro, descrivere nella maggiore un solido poliedro la cui superficie non tocchi la sfera minore.

Intendansi le due sfere intorno al medesimo centro A (*fig.* 63.); fa d'uopo nella sfera maggiore descrivere un solido poliedro, la cui superficie non tocchi la sfera minore.

Seghinsi le sfere da un piano tirato pel centro, i segamenti saranno cerchi; perciocchè girando il semicerchio intorno al diametro, che sta fermo, si è fatta la sfera; adunque intendendo il semicerchio in qualsivoglia posizione, il piano che passa per esso sarà un cerchio nella superficie della sfera; ed è chiaro essere cerchio massimo, perciocchè il diametro della sfera, che è anche diametro del cerchio, è maggiore di tutte le linee rette che tirar si possono nel cerchio o nella sfera (*prop.* 15. *III.*). Sia dunque nella sfera maggiore il cerchio BCDE, e nella minore il cerchio FGH; e si tirino i diametri di essi BD, CE ad angoli retti fra loro; ed essendo i due cerchi BCDE, FGH intorno

al medesimo centro, si descriva nel cerchio maggiore BCDE un poligono di lati uguali e pari di numero, che non tocchi il cerchio minore FGH (*prop.* 16. *XII.*), i lati del quale poligono nel quadrante BE del cerchio siano BK, KL, LM, ME; e si prolunghi la congiunta KA fino al punto N; e dal punto A si elevi al piano del cerchio BCDE la perpendicolare AX, la quale incontri la superficie della sfera nel punto X; e per la retta AX, e ciascheduna delle BD, KN si conducano i piani, i quali, come è chiaro dalle cose già dette, faranno nella superficie della sfera cerchi massimi; ed i loro semicerchi sieno BXD, KXN costituiti sopra i diametri BD, KN.

E poichè la retta XA è perpendicolare al piano del cerchio BCDE, saranno tutti i piani che passano per la XA perpendicolari al piano del cerchio BCDE (*prop.* 18 *XI.*); onde i semicerchi BXD, KXN sono a quel piano perpendicolari. E perchè i semicerchi BED, BXD, KXN sono uguali, dappoichè sono sopra gli uguali diametri BD, KN, eziandio i loro quadranti BE, BX, KX sono uguali fra loro; e perciò quanti lati del poligono sono nel quadrante BE, altrettanti saranno ne' quadranti BX, KX uguali a BK, KL, LM, ME; descrivansi, e siano BO, OP, PR, RX; KS, ST, TY, YX, e congiungansi OS, PT, RY; e dai punti O, S tirinsi le OV, SQ perpendicolari alle rette AB, AK.

Perciocchè il piano BOXD è perpendicolare al piano BCDE, e nel piano BOXD si è tirata la OV perpendicolare alla retta AB, comune sezione de' piani, sarà la OV perpendicolare al piano BCDE (*def.* 4. *XI.*); e per la medesima ragione la SQ sarà perpendicolare al medesimo piano BCDE, il quale dal piano KSXN è segato ad angoli retti. Si congiunga la VQ, e perchè ne' semicerchi uguali BXD, KXN si sono prese le circonferenze uguali BO, KS, e tirate le perpendicolari OV, SQ ai diametri dei cerchi, sarà la OV uguale alla SQ, e la BV uguale alla KQ; ma tutta BA è uguale a tutta KA; adunque la rimanente VA è uguale alla rimanente QA. Laonde come BV a VA, così KQ a QA, e perciò la VQ è parallela alla BK (*prop.* 2. *VI*). Ed essendo l'una e l'altra delle rette OV, SQ perpendicolare al piano del cerchio BCDE, sarà la OV parallela alla SQ (*prop.* 6. *XI.*); ma si è dimostrata anche uguale alla SQ, dunque le QV, SO sono uguali e parallele (*prop.* 33. *I.*). E perchè la QV è parallela alla SO, ed è anche parallela alla KB, sarà la OS parallela alla KB (*prop.* 9. *XI*); quindi le linee rette BO, KS che le congiungono, sono nel medesimo piano in cui sono le parallele OS, BK (*prop.* 7. *XI.*), e perciò il quadrilatero KBOS è in un piano, Se congiungansi le PB, TK, e dai punti P, T tirinsi le perpendicolari alle rette AB, AK, si dimostrerà la retta TP parallela alla

KB nel medesimo modo che si è dimostrata la SO parallela alla detta BK; per la qual cosa la TP è parallela alla SO (*prop.* 9. *XI.*), ed il quadrilatero SOPT è in un piano: e per la medesima ragione il quadrilatero TPRY è in un piano; ma anche in un piano è la figura YRX (*prop.* 2 *XI.*). Se dunque dai punti O, S, P, T, R, Y intendiamo tirate le linee rette al punto A, si constituirà una figura solida poliedra nelle circonferenze BX, KX composta da piramidi, le basi delle quali sono i quadrilateri KBOS, SOPT, TPRY e 'l triangolo YRX, ed il vertice, il punto A. Or se in ciascheduno dei lati KL, LM, ME facciamo la medesima costruzione che nel lato BK, e così ancora nei tre rimanenti quadranti ed in tutto l'altro emisfero, si descriverà nella sfera una figura solida poliedra composta da piramidi, le cui basi sono i detti quadrilateri e 'l triangolo YRX, che sono del medesimo ordine, e che hanno per vertice il punto A, cioè il centro della sfera. Dico la superficie della descritta figura poliedra non toccare la sfera minore in cui è il cerchio FGH. Perciocchè si tiri dal punto A al piano del quadrilatero KBOS la perpendicolare AZ (*prop.* 11. *XI.*), che incontri il piano nel punto Z, e si congiungano le BZ, ZK. Essendo la AZ perpendicolare al piano del quadrilatero KBOS, sarà perpendicolare a tutte le linee rette che la incontrano, e sono nel medesimo piano; onde la AZ è per-

pendicolare all'una e all'altra delle BZ, ZK. Or poichè la AB è uguale alla AK, ed al quadrato di AB sono uguali i quadrati di AZ, ZB; ed al quadrato di AK sono uguali i quadrati di AZ, ZK (*prop.* 47. *I.*); adunque i quadrati di AZ, ZB sono uguali ai quadrati di AZ, ZK; e tolto il comune quadrato di AZ, sarà il rimanente quadrato di BZ uguale al rimanente quadrato di ZK; e perciò la retta BZ è uguale alla retta ZK. Similmente dimostreremo le linee rette, che dal punto Z si tirano ai punti O, S, essere uguali all'una e all'altra delle BZ, ZK: sicchè il cerchio descritto col centro Z, ed intervallo ZB passerà pei punti K, O, S, ed il quadrilatero KBOS sarà nel cerchio. E poichè la KB è maggiore della QV, e la QV è uguale alla SO, sarà ancor la KB maggiore della SO: ma la KB è uguale all'una e all'altra delle BO, KS; dunque ciascheduna delle circonferenze uguali, che le rette KB, BO, KS tolgono nel cerchio KBOS, è maggiore della circonferenza che vi toglie la retta OS; e perciò le tre dette circonferenze insieme con una quarta uguale a ciascheduna di esse sono maggiori delle tre medesime circonferenze insieme con quella che vi toglie la retta OS, cioè di tutta la circonferenza: laonde la circonferenza sottesa dalla KB nel cerchio KBOS è maggiore che la quarta parte di tutta la circonferenza del cerchio KBOS, quindi l'angolo BZK al centro

è maggiore dell' angolo retto. Perchè dunque l' angolo BZK è ottuso, sarà il quadrato di BK maggiore de' quadrati di BZ, ZK (*prop.* 12. *II.*), cioè maggiore che il doppio del quadrato di BZ. Si congiunga la KV, e poichè nei triangoli KBV, OBV le due KB, BV sono uguali alle due OB, BV, e contengono angoli uguali, sarà l'angolo KVB uguale all'angolo OVB (*prop.* 4. *I.*); ma l' angolo OVB è retto, adunque è retto l'angolo KVB. E perchè la BD è minore che la DV due volte presa, sarà il rettangolo contenuto dalle DB, BV minore che il doppio del rettangolo DVB, cioè sarà il quadrato della KB (*prop.* 8. *VI.*) minore che il doppio del quadrato della KV: ma il quadrato della KB è maggiore che il doppio del quadrato della BZ; dunque il quadrato della KV è maggiore del quadrato della BZ. Ed essendo la BA uguale alla KA, ed al quadrato di BA uguali i quadrati di BZ, ZA, ed al quadrato di AK uguali i quadrati di KV, VA; saranno i quadrati di BZ, ZA uguali ai quadrati di KV, VA, dei quali il quadrato di KV è maggiore del quadrato di BZ; adunque il rimanente quadrato di VA è minore del rimanente quadrato di ZA, e perciò la linea retta AZ maggiore della retta AV. Sicchè la AZ è molto maggiore della AG, perciocchè nella precedente proposizione si è dimostrato la retta KV cadere fuori del cerchio FGH: ma la AZ è perpendicolare al piano KBOS, e quindi la mini-

ma di tutte le linee rette che dal centro della sfera al detto piano si possono condurre; laonde il piano KBOS cade fuori la sfera minore.

Che gli altri piani fra i quadranti BX, KX cadono fuori la sfera minore si dimostrerà nel seguente modo. Si tiri dal punto A al piano del quadrilatero SOPT la perpendicolare AI, o si congiunga la IO; e come del piano KBOS e del punto Z si è dimostrato, così si dimostrerà il punto I essere centro del cerchio descritto intorno al quadrilatero SOPT, e la retta OS maggiore della retta PT; e si è dimostrata la PT parallela alla OS adunque i trapezii KBOS, SOPT inscritti ne' cerchi hanno i lati BK, OS paralleli, non che i lati OS, PT; i rimanenti lati BO, KS, OP, ST uguali fra loro; ed oltracciò il lato BK maggiore del lato OS, ed il lato OS maggiore del lato PT; sarà la retta ZB maggiore della retta IO (*Lemma* 2.). Si congiunga la AO la quale sarà uguale alla AB; e perchè gli angoli AIO, AZB sono retti, saranno i quadrati di AI, IO uguali al quadrato di AO ossia di AB, cioè ai quadrati di AZ, ZA; ma il quadrato di ZB è maggiore del quadrato di IO, è dunque il rimanente quadrato di AZ minore del rimanente quadrato di AI; quindi la retta AZ è minore della retta AI; ma si è dimostrata la AZ maggiore della AG, adunque la AI è molto maggiore della retta AG. Sicchè il piano SOPT cade fuori la sfera minore. Col

medesimo ragionamento si dimostrerà il piano TPRY cadere fuori la sfera minore; come ancora il piano del triangolo YRX, coll' ajuto cioè del Corollario del Lemma 2: e similmente si dimostrerà che cadono fuori la sfera minore tutti gli altri piani dai quali si contiene il solido poliedro. Per la qual cosa essendo due sfere intorno al medesimo centro, si è descritto nella maggiore un solido poliedro la cui superficie non tocca la sfera minore. C. B. D.

COR. E se anche nell' altra sfera si descriva un solido poliedro; cioè tirando de' raggi dal centro della sfera a tutti gli angoli del solido poliedro descritto nella sfera maggiore, indi congiungendo i punti, ne' quali i detti raggi incontrano la superficie della sfera minore, con quel medesimo ordine con cui vengono congiunti dalle linee rette i punti ove i raggi incontrano la superficie della sfera maggiore; il solido poliedro descritto nella sfera BCDE avrà al solido poliedro descritto nell' altra sfera ragion triplicata di quella che ha il diametro della sfera BCDE al diametro dell' altra sfera. Imperciocchè divisi i solidi in piramidi uguali di numero e del medesimo ordine, tali parimidi saranno simili; conciossiachè sono contenuti da piani simili ed uguali di numero, hanno comuni gli angoli solidi al vertice, cioè al centro della sfera, ed uguali (*prop. B. XI.*) i rimanenti angoli solidi alle basi (essendo essi angoli solidi contenuti da

tre angoli piani uguali, ciascuno a ciascuno): ma le piramidi simili sono fra loro in triplicata ragione de' lati omologhi (*prop.* 8. *XII.*), adunque la piramide la cui base è il quadrilatero KBOS, ed il vertice il punto A, è alla piramide del medesimo ordine che è nell'altra sfera, in triplicata ragione del lato omologo al lato omologo, cioè del raggio AB al raggio dell'altra sfera. Si dimostrerà similmente essere ciascuna delle piramidi, che sono nella sfera maggiore, a ciascuna delle piramidi del medesimo ordine che sono nell'altra sfera, in triplicata ragione del raggio AB al raggio dell'altra sfera: ma come sta un antecedente al suo conseguente, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti presi insieme; dunque il solido poliedro che è nella sfera maggiore, è al solido poliedro descritto nell'altra sfera, in triplicata ragione del raggio AB al raggio dell'altra sfera, ovvero del diametro BD al diametro dell'altra sfera.

PROP. XVIII. TEOR.

Le sfere sono tra loro in triplicata ragione de' loro diametri.

Intendansi le sfere ABC, DEF (*fig.* 64.), i diametri delle quali sieno le BC, EF. Dico la sfera ABC essere alla sfera DEF in ragion triplicata di BC ad EF.

Perciocchè se non sia così, la sfera ABC sia ad una sfera minore di DEF, o da una maggiore, in ragion triplicata di BC ad EF: e sia primieramente ad una sfera minore, cioè GHK; ed intendasi la sfera DEF intorno al medesimo centro che la sfera GHK; e descrivasi nella sfera maggiore DEF un solido poliedro la cui superficie non tocchi la sfera minore GHK (*prop. prec.*); e nella sfera ABC descrivasi un solido poliedro simile a quello che nella sfera DEF si è descritto. Il solido poliedro che è nella sfera ABC avrà al solido poliedro che è nella sfera DEF ragion triplicata di quella che ha BC ad EF (*cor. prop. prec.*): ma la sfera ABC ha alla sfera GHK ragion triplicata di quella che ha BC ad EF onde come la sfera ABC alla sfera GHK, così il solido poliedro nella sfera ABC al solido poliedro nella sfera DEF: ma la sfera ABC è maggiore del solido poliedro che è in essa; dunque eziandio la sfera GHK sarà maggiore del solido poliedro che è nella sfera DEF; lo che è impossibile, perchè da esso è compresa. Laonde non è la sfera ABC ad una sfera minore di DEF in triplicata ragione di BC ad EF. Dimostreremo similmente non essere la sfera DEF ad una sfera minore di ABC in triplicata ragione di EF a BC. Dico neanco la sfera ABC essere ad una sfera maggiore di DEF in triplicata ragione di BC ad EF. Perciocchè, se può essere, sia ad una sfera maggiore LMN;

invertendo, sarà la sfera LMN alla sfera ABC in ragion triplicata del diametro EF al diametro BC: ma come la sfera LMN alla sfera ABC, così la sfera DEF, che è minore della sfera LMN, ad un'altra sfera minore della detta ABC; adunque la sfera DEF è ad una sfera minore di ABC in triplicata ragione di EF a BC; lo che si è già dimostrato impossibile. Adunque non è la sfera ABC ad una sfera minore di DEF, nè ad una sfera maggiore, in triplicata ragione di BC ad EF. Sicchè la sfera ABC è alla sfera DEF in triplicata ragione del diametro BC al diametro EF. C. B. D.

Fine del duodecimo Libro.

AI LETTORI

Il *metodo de' limiti, come se ne valse* Archimede *per dimostare molti utilissimi teoremi sulla sfera e sul cilindro, suole per la sua lunghezza recare ai giovani non poca noia e fatica. La lor mente gravata, per così dire, dal peso delle dimostrazioni sovente rifugge di apprendere quelle ammirabili verità. Mi son perciò determinato, dopo l'esempio di* Guido Grandi *e di* Andrea Tacquet *e di altri illustri geometri, di rilevare il principio, che è quel medesimo di cui fece uso il saggio* Euclide *nel duodecimo libro de' suoi elementi; ma di presentarlo alla gioventù studiosa sotto un aspetto più facile, per indi applicarlo di una maniera diretta e più spedita alle affezioni de' detti due corpi rotondi.*

Il principio, che qui appresso soggiungerò in forma di Lemma, é che se due grandezze siano limiti di una medesima grandezza saranno uguali fra loro. Nè temo di aver mancato al rigor geometrico avendo ammesse come proposizioni evidenti, che la superficie del prisma inscritto nel cilindro, senza con-

siderare le basi, sia minore della superficie convessa del cilindro; e che la superficie della piramide inscritta nel cono, anche senza la base, sia minore della superficie convessa del cono. Egli è vero che il prelodato Archimede *dimostrò la verità di queste due proposizioni, ma a me sembra che per l' evidenza loro non differiscano da quest' altra: di due superficie concave dalla medesima parte, e che hanno i medesimi limiti, la compresa è minore di quel a che la comprende, proposizione, che lo stesso* Archimede *non ebbe difficoltà di riporre fra i principii intuitivi.*

I TEOREMI SCELTI

DI ARCHIMEDE

SULLA SFERA, E SUL CILINDRO

DEFINIZIONI.

1. Se da un punto B (*fig.* 80.) della circonferenza del semicerchio ABC, generatore di una sfera, si abbassi la perpendicolare BD al diametro AC, ciascuno de' due solidi, che, nel generarsi la sfera, si descrive dal semisegmento circolare ABD, o dall' altro DBC, si dirà *segmento sferico.*

2. Il *vertice* del segmento sferico generato dal semisegmento circolare ABD, e l'estremo A del diametro immobile AC: la *base*, il cerchio descritto dalla perpendicolare BD: e l'*altezza*, la parte AD del diametro compresa fra il vertice A, e'l centro D della base.

3. Facendo girare il settore circolare ABE (*fig.* 80.), oppur l'altro BEC intorno ad un loro raggio immobile, come a dire, il primo intorno ad AE, ed il secondo intorno ad EC, finchè l'uno e l'altro ritorni al medesimo sito ondè

avea cominciato il suo moto, ciascuno de' solidi, che in siffatta rivoluzione si descrive, si dirà *settore sferico.*

Un tal solido, come ben si vede, è uguale ad un segmento sferico a cui si è aggiunto, oppur si è tolto un cono, che ha la medesima base del segmento, e per vertice il centro della sfera.

4. Se dagli estremi A, E (*fig.* 73.) della retta AE inflettuansi ad un punto B le linee rette AB, EB, che facciano con la AE gli angoli BAE, BEA acuti; indi s'iutenda il triangolo ABE girare intorno al lato immobile AE, finchè ritorni al medesimo sito dal quale avea cominciato il suo moto, il solido, che in siffatta rivoluzione si descrive, si dirà *rombo conico.*

Un tal solido si compone, come l'è chiaro, da due coni che hanno per base comune il cerchio descritto dalla perpendicolare BC abbassata dal vertice B al lato immobile AE, e gli assi AC, CE posti per dritto.

5. Una grandezza si dirà *limite* di un'altra, se questa col crescere o decrescere a quella si accosta in modo, che ne differisca per una quantità minore di qualunque data, senza però divenirle mai uguale.

N. B. Trattando di coni o di cilindri, intendo sempre parlare di coni e di cilindri retti; perciocchè quel che appartiene ai coni ed ai cilindri obliqui, supera la geometria elementare.

Dirò *superficie convessa* d'un cono, o d'un cilindro o d'un segmento sferico, per intendere la superficie di questi solidi senza le basi. Volendovi includere ancor le basi, dirò *superficie intera* del cono, del cilindro, o del segmento sferico. Del pari dirò semplicemente *superficie* del prisma o della piramide, per intendere la superficie laterale di ciascuno di questi solidi senza considerare le basi: ma dovendo aggiungere ancora le basi, dirò *superficie intera* del prisma o della piramide.

Continuando, nelle citazioni, a servirmi della cifra araba per dinotare il numero della proposizione, aggiungerò Archimede, per indicare ch'ella si trova fra questi teoremi scelti.

PRINCIPJ.

1. La linea retta è la più breve di tutte le linee, che hanno i medesimi termini.

2. Il perimetro del poligono iscritto nel cerchio è minore della circonferenza del cerchio; perciocchè ogni lato del poligono è minore dell'arco a cui è sotteso.

3. La superficie del prisma inscritto nel cilindro è minore della superficie convessa del cilindro.

4. E la superficie della piramide inscritta nel cono è minore della superficie convessa del cono.

5. Di tutte le superficie che hanno i medesimi termini, la piana è la minima.

6. E di due superficie concave dalla medesima parte, e che hanno i medesimi termini, la compresa è minore di quella che la comprende.

LEMMA.

Se due grandezze sieno limiti di una medesima grandezza, saranno uguali fra loro.

Le due grandezze A, B (*fig.* 65.) siano limiti della medesima C. Dico la grandezza A essere uguale all' altra B.

Perciocchè se A non sia uguale a B, una di esse sarà maggiore; e sia A maggior di B, e D denoti l' eccesso pel quale A avvanza B. Essendo B limite di C, la grandezza C si potrà avvicinare a B, senza divenirle mai uguale (*def.* 6.); onde A dovrà superare C di una quantità maggior di quella di cui supera B, cioè di una quantità maggior di D. Per la qual cosa A differendo da C per una quantità assegnabile, non sarà A limite di C; lo che è contrario alla supposizione. Adunque non è A maggiore di B. Similmente si dimostra non esser B maggiore di A. Sicchè le due grandezze A, B essendo limiti della medesima C, sono uguali fra loro. C. B. D.

PROP. I. TEOR.

Ogni cerchio pareggia un triangolo la cui base è uguale alla circonferenza di questo cerchio, e l'altezza al raggio.

Intendasi il cerchio ABGDEF (*fig.* 66.) descritto intorno al centro R. Dico il cerchio ABCDEF essere uguale al triangolo che ha per base la circonferenza del cerchio e per altezza il raggio.

Si descriva nel cerchio ABCDEF il poligono ABCDEF di lati uguali, e pari di numero; ed abbassata dal centro R la perpendicolare RP sopra il lato AF di detto poligono, si congiungano i raggi RA, RB, RC, RD, RE, RF. Il poligono ABCDEF sarà diviso in tanti triangoli quanti sono i suoi lati, i quali triangoli hanno la medesima altezza, cioè la perpendicolare RP: onde il triangolo che ha per base il perimetro del poligono ABCDEF, e per altezza la perpendicolare RP è uguale al poligono ABCDEF. Similmente divisi per mezzo gli archi AB, BC, CD, DE, EF, FA nei punti G, H, K, L, M, N; e congiunti questi punti di divisioni per mezzo delle linee rette, s'iscriverà nel cerchio ABCDEF il poligono AGBHCK ec. ancor di lati uguali e pari di numero, il quale sarà uguale a quel triangolo che ha per base il perimetro di detto poligono, e per altezza la perpendicolare Rç, che dal centro R del cer-

chio si abbassa sopra il lato FN del poligono suddetto. Or egli è manifesto, che il perimetro di questo secondo poligono è maggiore del perimetro del primo, ma minore della circonferenza del cerchio ABGDEF; e che la perpendicolare Rc è maggiore della perpendicolare RP, ma minore del raggio RA. Adunque il perimetro del poligono iscritto nel cerchio si può accostare alla circonferenza del cerchio, senza divenirle mai uguale; e pure la perpendicolare, che dal centro del cerchio si abbassa sopra un lato di esso poligono, può differire dal raggio del cerchio per una quantità minore di qualunque data. Sicchè il triangolo che ha per base la circonferenza del cerchio, e per altezza il raggio di questo è il limite di tutti i poligoni iscritti nel cerchio; ma il cerchio è ancor limite di tutti i poligoni iscritti in esso (*), ed i limiti di una medesima grandezza sono uguali fra loro. Adunque il cerchio è uguale a quel triangolo che ha per base la circonferenza di detto cerchio, e per altezza il raggio. C. B. D.

(*) Si può dimostrare, come nella proposizione I. del libro XII, che il poligono inscritto nel cerchio può differir da questo per una quantità minore di qualunque data; e che per conseguenza il cerchio è limite de' poligoni iscritti in esso.

SCOLIO.

Rappresentino AC, CB (*fig.* 67.) i raggi di due cerchi, ed EC, DC le loro rispettive circonferenze applicate perpendicolarmente a siffatti raggi nella loro estremità; e si congiungano le AE, BD. E poichè il triangolo ACE è uguale al cerchio del raggio AC, ed il triangolo BCD al cerchio del raggio BC; sarà il triangolo ACE al triangolo BCD, come il cerchio del raggio AC al cerchio del raggio BC. Ma il triangolo ACE è al triangolo BCD, come il rettagolo ACE al rattangolo BCD (*prop.* 15. *V.*); ed il cerchio del raggio AC è al cerchio del raggio BC, come il quadrato di AC al quadrato di BC (*prop.* 2. *XII.*). Dunque come il rettangolo ACE è al rettangolo BCD, così il quadrato di AC al quadrato di BC; e permutando, sarà come il rettangolo ACE al quadrato di AC, così il rettangolo BCD al quadrato di BC: ma come il rettangolo ACE al quadrato di AC, così la EC alla CA (*prop.* 1. *VI.*); e come il rettangolo BCD al quadrato di BC, così la DC alla CB; come dunque la EC alla CA, così la DC alla CB; e permutando, come la EC è alla DC, così la CA alla CB. Sicchè le circonferenze de' cerchi sono come i raggi, ovvero come i diametri di essi.

PROP. II. TEOR.

La superficie convessa del cilindro retto è uguale ad un rettangolo contenuto dal lato di questo cilindro, e dalla circonferenza del cerchio che gli serve di base.

Sia il cilindro retto (*fig.* 68.) la cui base è il cerchio ABCDEF, e l'asse PQ. Dico la superficie di questo cilindro essere uguale al rettangolo contenuto dall'asse PQ, che è uguale al lato del cilindro, e dalla circonferenza del cerchio ABCDEF.

Imperciocchè si descriva nel cerchio ABCDEF il poligono ABCDEF di lati uguali e pari di numero, e sopra di esso si dirizzi un prisma così alto come il cilindro; sarà la superficie di un tal prisma uguale a quel rettangolo che ha per base il perimetro del poligono ABCDEF, e per altezza il lato del cilindro. Se dividansi per mezzo gli archi AB, BC, CD, DE, EF, FA nei punti G, H, K, L, M, N; e congiunti questi punti di divisioni con delle linee rette, si dirizzi sopra quest'altro poligono anche un prisma così alto come il cilindro, sarà la superficie di detto prisma uguale a quel rettangolo che ha per base il perimetro del poligono AGBHCK ec. e per altezza il lato del cilindro. Ora potendosi avvicinare il perimetro del

poligono inscritto nella base del cilindro alla circonferenza del cerchio, senza però che le divenga mai uguale, è chiaro, che il rettangolo che ha per base la circonferenza della base del cilindro, e per altezza un lato di esso sarà il limite delle superficie de' prismi inscritti nel cilindro: ma la superficie convessa del cilindro è limite delle superficie de' prismi inscritti in esso, ed i limiti di una medesima grandezza sono fra loro uguali; adunque la superficie convessa del cilindro è uguale a quel rettangolo che ha per base la circonferenza della sua base e per altezza uno de' suoi lati. C. B. D.

PROP. III. TEOR.

La superficie convessa del cilindro retto è alla sua base come il doppio lato di questo cilindro al raggio della base.

Rappresentino DB (*fig.* 69.) la circonferenza della base di un cilindro, BC un raggio della sua base, e BE uno de' suoi lati. Dico la superficie convessa di un tal cilindro essere alla sua base come il doppio di BE a BC.

Si applichi la DB perpendicolarmente alla BE nel punto B; e colle due DB, BE si compisca il rettangolo BF; indi prolungata la BE in A, fino a tanto che sia EA uguale a BE, si congiungano le DA, DC. E poichè il rettangolo

DE ed il triangolo ABD sono fra le medesime parallele AB, DF; e la base del triangolo è doppia di quella del rettangolo, sarà il triangolo ABD uguale al rettangolo DE (*prop.* 41. *I*): ma il rettangolo DE è uguale alla superficie convessa del cilindro; dunque eziandio il triangolo ABD è uguale alla superficie convessa del cilindro. Ed è poi il triangolo BCD uguale alla base del cilindro (*prop.* 1. *Arch.*); sicchè la superficie convessa del cilindro è alla sua base, come il triangolo ABD al triangolo CBD: ma come il triangolo ABD al triangolo CBD, così AB a BC (*prop.* 1. *VI.*); adunque la superficie convessa del cilindro è alla sua base come BA a BC, cioè come il doppio lato del cilindro al raggio della sua base. C.B. D.

SCOLIO.

Fra le BA, e BC (*fig.* 69) si rinvenga la media proporzionale M; sarà BA a BC in duplicata ragione di M a BC. Ma in duplicata ragione di M a BC è il cerchio del raggio M al cerchio del raggio BC (*prop.* 2. *XII.*); e come BA a BC, così il triangolo ABD al triangolo CBD: come dunque il cerchio del raggio M al cerchio del raggio BC, così il triangolo ABD al triangolo BCD. Ma il triangolo BCD è uguale al cerchio del raggio BC; adunque benanche il triangolo ABD, ch' è uguale alla

superficie convessa del cilindro, sarà uguale al cerchio del raggio M. Sicchè *la superficie convessa del cilindro retto è uguale ad un cerchio il cui raggio è medio proporzionale fra il doppio lato del cilindro, e'l raggio della sua base.*

PROP. IV. TEOR.

La superficie convessa del cono retto è uguale ad un triangolo la cui base è uguale alla circonferenza della base di questo cono, e l'altezza è uguale ad un lato del medesimo solido.

Sia il cono retto (*fig.* 70.) la cui base il cerchio ABCD, l'asse PK, e BK uno de' suoi lati. Dico la superficie di un tal cono essere uguale al triangolo che ha per base la circonferenza del cerchio ABCD, e per altezza BK.

Perciocchè si descriva nel cerchio ABCD il poligono ABCD di lati uguali e pari di numero; e sopra di esso intendasi dirizzata una piramide che abbia il medesimo vertice del cono. Essendo i triangoli dai quali si compone la superficie della piramide, uguali (*prop.* 8. *I.*) e constituiti sopra le uguali basi AB, BC, CD, DA, avranno uguali le altezze; cioè le perpendicolari che dal vertice K si abbasseranno su le rette AB, BC, CD, DA: quindi il triangolo che ha per base il perimetro del poligono ABCD,

e per altezza la perpendicolare KM condotta dal vertice K al lato BC, sarà uguale alla superficie della suddetta piramide. Se dividansi gli archi AB, BC, CD, DA per metà ne' punti F, G, H, E, e congiungansi per mezzo di linee rette questi punti di divisioni, e sul poligono AFBGCHDE si dirizzi ancor una piramide che abbia il medesimo vertice del cono; si dimostrerà, come qui innanzi, essere la superficie di siffatta piramide uguale a quel triangolo che ha per base il perimetro del poligono AFBGCHDE, e per altezza la perpendicolare KN, che dal vertice si conduce al lato GC. Ed essendo la PN maggiore della PM, saranno i quadrati delle KP, PN maggiori de' quadrati delle KP, PM; ma ai quadrati delle KP, PN è uguale il quadrato della KN (*prop.* 47. *I.*), ed ai quadrati delle KP, PM è uguale il quadrato della KM: dunque il quadrato della KN è maggiore del quadrato della KM, e quindi la linea retta KN è maggiore della KM. Congiunto il raggio PB, si potrà dimostrare similmente essere la KB maggiore di ciascuna delle KN, KM. Egli è manifesto che il perimetro del poligono inscritto nella base ABCD del cono si avvicina alla circonferenza del cerchio ABCD, senza divenirle mai uguale, e che la perpendicolare abbassata dal vertice del cono sopra un lato di questo poligono va differendo dal lato BK per una quantità minore di qualunque data. Laonde quel triangolo che ha per base la cir-

conferenza del cerchio ABCD, e per altezza KB è il limite delle superficie delle piramidi inscritte nel cono, il quale ha per base il cerchio ABCD, e per vertice il punto K; ma la superficie convessa del cono è il limite delle superficie delle piramidi inscritte in esso: adunque, per lo Lemma altre volte citato, la superficie convessa del cono retto è uguale a quel triangolo che ha per base la circonferenza della base di questo cono, e per altezza un lato del medesimo solido. C. B. D.

PROP. V. TEOR.

La superficie convessa del cono retto è alla sua base, come il lato di questo cono al raggio della base.

Rappresentino BA (*fig.* 69.) il lato d'un cono retto, BD la circonferenza della base, e BC il raggio di questa base. Dico la superficie convessa di un tal cono essere alla sua base, come BA a BC.

Si applichi la BD perpendicolarmente alla BA nell'estremo B, e congiungansi le DA, DC. E poichè il triangolo ADB è al triangolo BCD come BA a BC (*prop.* 1. *VI.*); ed il triangolo ADB è uguale alla superficie convessa del cono (*prop. prec.*), ed il triangolo CBD è uguale al cerchio del raggio CB (*prop.* 1. *Arch.*), cioè alla base del cono medesimo: sarà adunque la super-

ficie convessa del cono alla sua base come BA a BC; cioè come il lato del cono al raggio della sua base. C. B. D.

SCOLIO.

Si rinvenga la retta M (*fig.* 69.) media proporzionale fra le BA, BC; sarà BA a BC in duplicata ragione di M a BC. Ma come BA a BC, così il triangolo ADB al triangolo CDB; e come la duplicata ragione di M a BC, così il cerchio del raggio M al cerchio del raggio BC (*prop.* 2. *XII.*). Adunque come il triangolo ABD al triangolo CDB, così il cerchio del raggio M al cerchio del raggio BC. Per la qual cosa essendo il triangolo CDB uguale al cerchio del raggio BC (*prop.* 1. *Arch.*), sarà anche il triangolo ADB, che è uguale alla superficie convessa del cono, uguale al cerchio del raggio M. Sicchè *la superficie convessa di un cono retto è uguale a quel cerchio il cui raggio è medio proporzionale fra il lato di questo cono, e'l raggio della sua base.*

PROP. VI. TEOR.

Se un cono sia segato da un piano parallelo alla sua base, la sezione sarà un cerchio; e la superficie convessa del tronco che resta, togliendone il piccol cono, sarà uguale ad un rettangolo che ha per altezza il lato del tronco, e per base la semisomma delle circonferenze delle due sue basi.

Sia il cono AKCM (*fig.* 71.) segato dal piano BFC parallelo alla base KSM. Dico la sezione BFC esser cerchio; e la superficie convessa del tronco BKSMC essere uguale a quel rettangolo che ha per altezza il lato MC del tronco, e per base la semisomma delle circonferenze delle basi KSM, BFC.

Congiungasi l'asse AL del cono. E poichè i due piani paralleli KSM, BMC vengono segati dal piano ALM; le loro comuni sezioni LM, DC saranno parallele (*prop.* 16. *XI.*). Quindi l'angolo ADC sarà uguale all'angolo ALM (*prop.* 29. *I.*); ma l'angolo ALM è retto, dunque eziandio retto è l'angolo ADC. Per la qual cosa il triangolo rettangolo ADC girando intorno al lato AD genererà un cono, di cui il lato DC ne descriverà la base, cioè il cerchio.

Si elevi dal punto M alla retta MA la perpendicolare MR, la quale si ponga uguale alla

circonferenza del cerchio KSM ; e congiunta la AR, si meni per C la retta CN parallela alla MR. Per la somiglianza de' triangoli LAM, DAC, sarà LM ad MA come DC a CA ; e permutando sarà come LM a DC, così MA ad AC. Ma come LM a DC, così la circonferenza del cerchio KSM alla circonferenza del cerchio BFC (*Scol. prop. I. Arch.*) ; ed a cagion de' triangoli simili AMR, ACN, come MA ad AC, così MR a CN : adunque come la circonferenza del cerchio KSM alla circonferenza del cerchio BFC, così la MR alla CN. Il perchè essendo la MR uguale alla circonferenza del cerchio KSM, sarà ancor la CN uguale alla circonferenza del cerchio BFC (*prop.* 14. *V.*). Quindi essendo la superficie convessa del cono AKSM uguale al triangolo AMR, e la superficie convessa del cono ABFC uguale al triangolo ACN (*prop.* 4. *Arch.*) ; sarà la superficie convessa del tronco conico BKSMC, la quale adequa la differenza di queste due superficie, uguale al trapezio CMRN. Congiungasi la MN, e pel punto N tirisi la NQ parallela alla CM. Il triangolo MCN è uguale al rettangolo di MC nella metà di CN ; ed il triangolo MNR è uguale al rettangolo di NQ ovvero CM nella metà di MR. Laonde il trapezio CMRN sarà uguale al rettangolo di CM nella semisomma delle MR, CN. Ma si è dimostrato la superficie convessa del tronco conico BKSMC essere uguale a questo trapezio ;

e le MR, CN essere rispettivamente uguali alle circonferenze de' cerchi KSM, BFC: dunque la superficie convessa del tronco conico BKSMC è uguale al rettangolo di CM nella semisomma delle circonferenze de' cerchi KSM, BFC. Sicchè se un cono sia segato da un piano ec. C. B. D.

SCOLIO I.

Pel punto medio H della MC si tiri la HE parallela alla ML, e per C la CP parallela all' asse AL. Sarà PM a GH come MC a CH; e quindi GH metà di PM, come lo è CH di CM. Ma la EG è metà delle due LP, DC: dunque la EH è metà delle due LM, DC. Per la qual cosa essendo le circonferenze de' cerchi come i diametri ovvero i raggi di essi (*Scol. prop.* 1 *Arch.*), sarà la circonferenza del cerchio descritto col raggio EH uguale alla semisomma delle circonferenze dei cerchi descritti co' raggi LM, DC. Laonde la superficie convessa del tronco conico BKSMC sarà uguale al rettangolo di CM nella circonferenza del cerchio descritto col raggio EH.

SCOLIO II.

Fra il lato CM del tronco conico, e la somma de' raggi LM, DC si rinvenga la media proporzionale X. E poichè la somma delle LM, DC sta ad X come X a CM, sarà anche la

somma delle circonferenze de' cerchi descritti co' raggi LM, DC alla circonferenza di X, come X a CM: ovvero, prendendo la metà de' termini della prima ragione, sarà come la circonferenza del cerchio che ha per raggio EH alla semicirconferenza del cerchio che ha per raggio X, così X a CM. Quindi essendo il rettangolo dell' estreme uguale a quello delle medie (*prop.* 16. *VI.*), sarà il rettangolo di CM nella circonferenza del cerchio che ha per raggio EH, uguale al rettangolo di X nella semicirconferenza del cerchio che ha per raggio X. Ma il primo di questi rettangoli è uguale alla superficie convessa del tronco conico BKSMC; ed il secondo è uguale al cerchio che ha per raggio X (*prop.* 1. *Arch.*): dunque la superficie convessa del tronco conico BKSMC è uguale al cerchio che ha per raggio X. Laonde

la superficie convessa d' un tronco conico è uguale ad un cerchio il cui raggio è medio proporzionale tra il lato del tronco, e la somma de' raggi delle di lui basi.

PROP. VII. TEOR.

Ogni cono è uguale ad una piramide che ha per altezza il di lui asse, e la cui base è un rettilineo uguale alla base del cono. Ed ogni cilindro è uguale ad un prisma che ha per altezza il di lui asse, e la cui base è un rettilineo uguale alla base del cilindro.

Si può dimostrare come nella prop. 2. del Libro XII. che il poligono inscritto nella base di un cono può differire da questa per una grandezza minore di qualunque data; e si può dimostrare, come nella prop. 10. del libro citato, che la piramide eretta su tal poligono, e che abbia il medesimo vertice del cono, si accosterà al cono medesimo per una quantità inassegnabile, senza però divenirgli mai uguale. Il cono dunque è limite di tutte le piramidi inscritte in esso; e limite ancora di siffatte piramidi è quella che ha per base un rettilineo uguale alla base del cono, e per altezza l'asse di questo solido. Ma i limiti di una medesima grandezza sono uguali fra loro: dunque ogni cono è uguale ad una piramide che ha per altezza l'asse del cono, e per base un rettilineo uguale alla base del cono medesimo.

Inoltre, il cilindro è triplo del cono con cui ha la medesima base, e la medesima altezza

(*prop.* 10. *XII.*) ; ed il prisma è anche triplo della piramide qualora poggia con questa su la medesima base , e ne ha la medesima altezza. Ma il cono è uguale a quella piramide che ha per altezza il di lui asse , e per base un rettilineo uguale alla base del cono. Dunque eziandio il cilindro è uguale a quel prisma che ha per altezza il di lui asse , e per base un rettilineo uguale alla base del cilindro. C. B. D.

PROP. VIII. TEOR.

Ogni tronco conico è uguale alla somma di tre coni che hanno per altezza comune l'altezza del tronco , e le basi de' quali sono il cerchio inferiore del tronco , il cerchio superiore , ed il cerchio medio proporzionale tra questi due.

Il cono AKSM (*fig.* 71.), di cui l'asse è AL, sia segato dal piano BFC parallelo alla base KSM; la sezione BFC , come si è dimostrato (*prop.* 6. *Arch.*) , è un cerchio. Dico il tronco conico BKSMC essere uguale alla somma de' tre coni che hanno per altezza comune la DL , altezza del tronco , e le basi de' quali sono il cerchio KSM , il cerchio BFC , ed il cerchio medio proporzionale tra questi due. Fra le due LM , DC si rinvenga la media proporzionale V. E poichè le LM , V , DC sono in continua proporzione , sa-

rà come LM a DC così il quadrato di V al quadrato di DC. Ma come LM a DC, così LA ad AD, per essere simili i triangoli ALM, ADC; e come il quadrato di V al quadrato di DC, così il cerchio del raggio V al cerchio BFC (*prop.* 2. *XII.*). Dunque come LA ad AD, così il cerchio del raggio V al cerchio BFC. Quindi il cono che ha per base il cerchio di V, e per altezza AD, sarà uguale al cono che ha per base il cerchio BFC, e per altezza AL (*prop.* 15. *XII.*). Tolgasi di comune il cono BFCA, sarà la differenza del cono che ha per base il cerchio di V e per altezza DA, e del cono BFCA; uguale al cono che ha per base il cerchio BFC, e per altezza DL. Inoltre, essendo le LM, V, DC continuamente proporzionali, sarà come LM a DC, così il quadrato di LM al quadrato di V. E sostituendo alla prima di queste ragioni quella di LA ad AD, ed alla seconda quella che ha il cerchio KSM al cerchio del raggio V (*prop.* 2. *XII*); sarà come LA ad AD, così il cerchio KSM al cerchio del raggio V. Quindi il cono che ha per base il cerchio KSM e per altezza AD, sarà uguale al cono che ha per base il cerchio di V, e per altezza AL: ovvero il primo di questi coni sarà uguale a due coni che hanno per base comune il cerchio di V, e le altezze de' quali sono rispettivamente DA, e DL. Ciò premesso, il tronco conico BKSMC è uguale alla differenza del cono AKSM

dal cono ABFC, ovvero è uguale al cono che ha per base il cerchio KSM e per altezza DL, ed alla differenza de' coni che hanno per altezza comune DA, e le basi de' quali sono il cerchio KSM, ed il cerchio BFC. Ma il cono che ha per base il cerchio KSM, e per altezza DA, è uguale a due coni che hanno per base comune il cerchio di V, e le altezze de' quali sono rispettivamente DA, e DL: dunque il tronco conico BKSMC è uguale al cono che ha per base il cerchio KSM e per altezza DL, al cono che ha per base il cerchio di V e per altezza DL, ed alla differenza de' coni che hanno la medesima altezza DA, e le basi de' quali sono il cerchio del raggio V, ed il cerchio BFC. Ma la differenza di questi due ultimi coni si è dimostrata uguale al cono che ha per base il cerchio BFC, e per altezza DL: dunque il tronco conico BKSMC è uguale alla somma de' tre coni che hanno per altezza comune la DL, e le basi de' quali sono il cerchio KSM, il cerchio BFC, ed il cerchio del raggio V che è medio proporzionale tra questi due. Sicchè ogni tronco conico è uguale ec. C. B. D.

PROP. IX. TEOR.

Se vi siano due coni, e la base dell' uno sia uguale alla superficie convessa dell' altro, e la perpendicolare che dal centro della base di questo si abbassa sopra un suo lato, sia uguale all' altezza di quello; tali coni saranno uguali fra loro.

La base BCD del cono ABCD (*fig.* 72.) sia uguale alla superficie convessa del cono FHKL; e la perpendicolare MG, abbassata dal centro M della base HKL sopra il lato FH di questo secondo cono, sia uguale all' altezza AE del primo. Dico il cono ABCD essere uguale al cono FHKL.

Perciocchè essendo la base BCD uguale alla superficie convessa del cono FHKL, sarà come la base BCD alla base HKL, così la superficie del cono FHKL alla medesima base HKL. Ma come la superficie del cono FHKL alla sua base HKL, così FH ad HM (*prop.* 5. *Arch.*); ovvero FM ad MG, per essere simili i triangoli FHM, FMG (*prop.* 8. *VI.*). Adunque come la base BCD alla base HKL, così FM ad MG; oppure FM ad AE, essendosi supposta AE uguale ad MG. Il perchè i due coni ABCD, FHKL avendo le basi in ragion reciproca delle altezze, sono tra loro uguali (*prop.* 15. *XII.*). Sicchè se vi siano due coni ec. C. B. D.

PROP. X. TEOR.

Ogni rombo conico è uguale ad un cono la cui base adegua la superficie convessa di uno de' coni componenti il rombo conico, e l' altezza è quanto la perpendicolare, che dal vertice dell' altro cono si abbassa sopra un lato del primo.

Sia il rombo conico ABIDE (*fig.* 73.); e dal vertice E del cono BIDE si abbassi la perpendicolare EF sul lato AD; indi si esponga il cono HLKG, la cui base HLK pareggi la superficie convessa del cono BIDA, e l'altezza MG sia uguale alla perpendicolare EF. Dico il rombo conico ABIDE essere uguale al cono HLKG.

Si esponga un altro cono PXQN, la cui base PXQ sia uguale alla base BID del rombo conico, e l' altezza NR all' asse AE di questo solido. Essendo il cono BIDE al cono BIDA come EC a CA (*prop.* 14. *XII.*), sarà, componendo, il rombo conico ABIDE al cono BIDA come EA ad AC. Ma come EA, o la sua uguale RN ad AC, così il cono PXQN al cono ABID (*prop.* 14. *XII.*). Dunque come il rombo conico ABIDE al cono ABID, così il cono PXQN al medesimo cono ABID. E quindi il cono PXQN è uguale al rombo conico ABIDE (*prop.* 9. *V.*). E perchè il cerchio HLK è uguale alla super-

ficie convessa del cono ABID, sarà il cerchio HLK al cerchio BID, come la superficie convessa del cono ABID al medesimo cerchio BID (*prop.* 7. *V.*). Ma come la superficie convessa del cono ABID alla sua base BID, così AD a DC (*prop.* 5. *Arch.*), ovvero AE ad EF, per essere simili i triangoli ACD, AFE. Adunque come il cerchio HLK al cerchio BID, così AE ad EF: oppure come il cerchio HLK al cerchio PXQ, così NR a GM; conciossiachè il cerchio PXQ è uguale al cerchio BID, la retta NR alla retta AE, e la GM alla EF. Per la qual cosa i due coni PXQN, HLKG avendo le basi in ragion reciproca delle altezze, sono uguali fra loro. Ma il cono PXQN si è dimostrato uguale al rombo conico ABIDE: dunque eziandio il cono HLKC è uguale al rombo conico ABIDE. Sicchè ogni rombo conico è uguale ad un cono ec. C. B. D.

PROP. XI. TEOR.

Se un cono sia segato da un piano parallelo alla sua base, e su la sezione che è un cerchio, si costituisca un altro cono che abbia per vertice il centro della base del cono proposto; la differenza di questo solido dal rombo conico, che dentro di esso si viene a costituire, è uguale ad un cono la cui base pareggia la superficie convessa del tronco, e l'altezza è quanto la perpendicolare che dal centro della base del cono primiero si abbassa sopra un lato di questo.

Il cono AGKH (*fig.* 74.) sia segato dal piano BLD parallelo alla base GKH, e sul cerchio BLD si costituisca il cono BDLC che abbia per vertice il centro C della base GKH; dal quale si abbassi sul lato AG la perpendicolare CE. Dico la differenza del cono AGKH dal rombo conico ABDLC essere uguale al cono RYZV, la cui base YZV pareggia la superficie convessa del tronco conico BGKHD, e l'altezza è quanto la perpendicolare CF.

Si espongano due altri coni PMNO, QSTX, che abbiano per altezza la medesima perpendicolare CF, e le basi de' quali sieno il cerchio MNO uguale alla superficie convessa del cono AGKH, ed il cerchio STX uguale alla superficie convessa

del cono ABLD. E poichè il cono PMNO è ai coni QSTX, RYZV, come la base MNO alle basi STX, YZV (*prop.* 11. *XII.*); ed è la base MNO uguale alle basi STX, YZV; dunque il cono PMNO è uguale ai coni QSTX, RYZV. E quindi il cono RYZV pareggierà la differenza del cono PMNO dal cono QSTX. Ma il cono PMNO è uguale al cono HGKH (*prop.* 9. *Arch.*); ed il cono QSTX è uguale al rombo conico ABDLC (*prop. prec.*). Adunque il cono RYZV è uguale alla differenza del cono AGKH dal rombo conico ABDLC. Laonde se un cono sia segato da un piano ec. C. B. D.

PROP. XII. TEOR.

Se uno dei coni componenti un rombo conico sia segato da un piano parallelo alla sua base: e su la sezione, che è un cerchio, si dirizzi un cono che abbia per vertice quello dell' altro cono componente il rombo; e se da questo vertice al lato del primo cono si abbassi la perpendicolare: la differenza del primo rombo conico da quello che in tal modo si viene a costituire, è uguale ad un cono che ha per altezza la detta perpendicolare, e la cui base pareggia la superficie convessa del tronco.

Sia il rombo conico AGHKL (*fig.* 75.); ed uno dei coni AGKH che lo compongono, sia segato dal piano BED parallelo alla base GKH; e sul cerchio BED si costituisca il cono BDEL, che abbia il punto L per vertice; e da questo punto L si abbassi sopra il lato AG la perpendicolare LF. Dico la differenza del rombo conico AGHKL dal rombo conico ABDEL essere uguale al cono RYZV, il quale ha l' altezza uguale ad LF, e per base il cerchio YZV uguale alla superficie convessa del tronco conico BGKHD.

Si espongano due altri coni PMNO, QSTX, che abbiano l' altezza uguale ad LF, e le basi de' quali sieno il cerchio MNO uguale alla

superficie convessa del cono AGKH, ed il cerchio STX uguale alla superficie convessa del cono ABED. Si può dimostrare, come nella proposizione precedente, essere il cono RYZV uguale alla differenza del cono PMNO dal cono QSTX. Ma il primo di questi coni è uguale al rombo conico AGHKL; ed il secondo è uguale al rombo conico ABDEL (*prop.* 10. *Arch.*). Dunque il cono RYZV è uguale alla differenza del rombo conico AGHKL dal rombo conico ABDEL. Sicchè se uno de' coni componenti ec. C. B. D.

PROP. XIII. TEOR.

Se la semicirconferenza d'un cerchio si divida in un numero pari di parti uguali, e siffatti punti di divisioni si congiungano con delle corde; indi si faccia girare il semicerchio col rettilineo che ne risulta intorno al diametro, che sta fermo: la superficie conica che da queste corde si descrive, sarà uguale ad un rettangolo contenuto da esso diametro, e dalla circonferenza del cerchio che ha per raggio la perpendicolare, che dal centro del semicerchio si abbassa sopra una delle corde suddette.

La circonferenza del semicerchio A B D E F (*fig.* 76.) descritto sopra il diametro AF si divida nelle parti uguali AB, BD, DE, EX, XY, YF, e

che sieni pari di numero; e si congiungano le rette AB, BD, DE, EX, XY, YF; e dal centro C sopra una di queste corde, per esempio, AB, si abbassi la perpendicolare CH; indi s' intenda girare il semicerchio col rettilineo ABDEF intorno al diametro AF. Dico la superficie conica che dalle rette AB, BD, DE, ec. si descrive, essere uguale al rettangolo contenuto dal diametro AF, e dalla circonferenza del cerchio che ha per raggio CH.

Dal centro C si abbassi su la corda BD la perpendicolare CG, che segnerà nella BD il punto medio G (*prop.* 3. *III.*); e dai punti B, G si tirino al diametro AF le perpendicolari BK, GN; e per B si meni BQ parallela ad AF. Il triangolo ABK rettangolo in K girando intorno ad AK descriverà un cono, la cui superficie convessa descritta da AB pareggerà il triangolo che ha per base la circonferenza di BK, e per altezza AB (*prop.* 4. *Arch.*), oppure, il rettangolo contenuto dalla circonferenza di BK, e da HA metà di AB. Ma i triangoli rettangoli ABK, AHC avendo di comune l' angolo acuto in A, saranno equiangoli e simili; onde come BK a KA, così CH ad HA; e permutando, come BK, a CH, così KA ad AH; e finalmente sostituendo alla ragione di BK a CH quella della loro circonferenza (*scol. prop. I. Arch.*), sarà come la circonferenza di BK alla circonferenza di CH, così KA ad AH. Il perchè dovendo es-

sere il rettangolo dell' estreme uguale a quello delle medie (*prop.* 16. *VI.*), sarà il rettangolo della circonferenza di BK in HA nguale al rettangolo della circonferenza di CH in KA. Ma il primo di questi rettangoli si è dimostrato uguale alla superficie conica descritta dalla retta AB: dunque eziandio il rettangolo della circonferenza di CH in KA sarà uguale alla superficie conica descritta dalla retta AB. Inoltre, il trapezio BDPK girando intorno a PK descriverà un tronco, la cui superficie convessa, cioè quella descritta dalla corda BD, sarà uguale al rettangolo di BD nella circonferenza di GN (*scol. I. prop. 6. Arch.*). Ma l' angolo retto CGB è uguale ai due BGM, MBG; onde toltone di comune l' angolo BGM, rimarrà l' angolo CGN uguale all' angolo GBM. Per la qual cosa i triangoli rettangoli CGN, BGM, avendo ancora uguali i loro angoli acuti CGN, GBM, saranno equiangoli e simili; ma il triangolo GBM è simile al triangolo BDQ: dunque eziandio il triangolo CGN è simile al triangolo BDQ. E quindi come BD a BQ, così CG a GN, ovvero, sostituendo alla ragione delle rette CG, GN quella delle loro circonferenze, sarà come BD a BQ, così la circonferenza di CG alla circonferenza di GN. Dunque il rettangolo di BD nella circonferenza di GN sarà uguale al rettangolo di BQ nella circonferenza di CG. Ma il primo di questi rettangoli è uguale alla su-

perficie conica descritta dalla retta BD: dunque benanche il rettangolo di BQ nella circonferenza di CG, ossia il rettangolo di KP nella circonferenza di CH, sarà uguale alla superficie conica descritta dalla retta BD. Ma si è ancor dimostrato la superficie conica descritta dalla retta AB essere uguale al rettangolo di AK nella medesima circonferenza di CH: dunque la somma delle superficie coniche che dalle rette AB, BD si descrivono, pareggia il rettangolo di AP nella circonferenza di CH. La qual cosa potendosi similmente dimostrare per le superficie descritte dalle altre corde, ne siegue esser la somma di tutte queste superficie uguale al rettangolo contenuto dal diametro AF, e dalla circonferenza del cerchio che ha per raggio la CH. Laonde se la circonferenza di un semicerchio ec. C. B. D.

PROP. XIV. TEOR.

Poste le medesime cose del teorema precedente, il solido, che dal rettilineo si descrive, sarà uguale ad un cono la cui base adegua la superficie di questo solido, e l' altezza è quanto la perpendicolare che dal centro del semicerchio si abbassa sopra un lato di detto rettilineo.

Sieno AB, BD, DE (*fig.* 77.) i lati del rettilineo inscritti nel quadrante ABDE; e si abbassino dal centro C su i detti lati le perpendicolari CF, CG, CH; e si distendano le DB, ED, fino a tanto che incontrino il semidiametro CA ne' punti K, L; e finalmente si congiungano i raggi CB, CD, CE.

Il triangolo ABC avendo gli angoli BAC, BCA acuti, nel girare intorno ad AC descriverà un rombo conico; il quale sarà uguale a quel cono che ha per altezza CF, e la cui base adegua la superficie conica descritta dalla retta AB (*prop.* 10. *Arch.*). Similmente i triangoli CBK, CDK girando intorno a CK descriveranno due rombi conici, la differenza de' quali, cioè il solido descritto dal triangolo CBD, nel rivolgersi del rettilineo intorno al diametro AO, sarà uguale a quel cono che ha per altezza CG, o la sua uguale CF, e per base

un cerchio uguale alla superficie conica descritta dalla retta BD (*prop.* 12. *Arch.*). Laonde il solido descritto dal quadrilineo ABCD sarà uguale a quel cono che ha per altezza CF, e la cui base pareggia la somma delle superficie descritte dalle rette AB, BD. Ma il triangolo ECL che ha retto l'angolo ECL, girando intorno a CL descriverà un cono; ed il triangolo CDL descriverà un rombo conico: onde la loro differenza, cioè il solido descritto dal triangolo CDE, sarà uguale a quel cono che ha per altezza CH, o la sua uguale CF, e la cui base adegua la superficie conica descritta dalla retta DE (*prop.* 11. *Arch.*). Per la qual cosa il solido descritto dal rettilineo ABDEC pareggia quel cono che ha per altezza CF, e la cui base è uguale alla somma delle superficie coniche descritte dalle rette AB BD, DE. Potendosi applicare la medesima dimostrazione nell' altro quadrante EMNO, ne siegue: che il solido descritto dal semipoligono ABDEMNO, qualora questo col semicerchio ABENO si aggira intorno al diametro AO, è uguale al cono che ha per altezza CF, e la cui base pareggia la superficie del solido suddetto. C. B. D.

PROP. XV. TEOR.

La superficie della sfera è uguale al rettangolo che si contiene dal diametro della sfera, e della circonferenza d' un di lei cerchio massimo.

Sia ABDEF (*fig.* 78.) il semicerchio, che girando intorno al suo diametro AF generi la sfera. Dico la superficie di questa essere uguale a quel rettangolo che ha per base la circonferenza del cerchio descritto col raggio CA, e per altezza il diametro AF.

Si divida la circonferenza del semicerchio ABDEF in qualunque numero pari di parti uguali AB, BD, DE, EF; si congiungano i punti prossimi di tali divisioni con le rette AB, BD, DE, EF; e dal centro C sopra una di queste, per esempio, sopra la BA, si abbassi la perpendicolare CH. La superficie conica che le rette AB, BD, DE, EF descriveranno, nel rivolgersi del semicerchio ABDEF intorno al suo diametro AF, sarà uguale al rettangolo contenuto dal detto diametro AF, e dalla circonferenza del cerchio che ha per raggio CH (*prop.* 13. *Arch.*). Se gli archi AB, BD, DE, EF dividansi ancor per metà nei punti G, L, M, N, e congiungansi le corde AG, GB, BL ec.; la superficie conica da esse descritta sarà uguale al ret-

tangolo contenuto dal diametro AF, e dalla circonferenza del cerchio che ha per raggio la perpendicolare Cc abbassata dal centro C sopra una di siffatte corde, qual sarebbe BG. Or egli è manifesto, che a misura che gli archi si bisechino, le sottese delle parti loro descriveranno delle superficie coniche che si avvicineranno alla superficie sferica, senza però divenirle mai uguali; e che la perpendicolare abbassata dal centro sopra una di dette corde differirà dal raggio CA per una grandezza minore di qualunque data. Dunque il rettangolo contenuto dal diametro AF, e dalla circonferenza di CA sarà limite delle sovraccennate superficie coniche; delle quali è ancor limite la superficie della sfera descritta dal semicerchio ABDEF. Ma i limiti di una medesima grandezza, giusta il lemma altre volte citato sono uguali fra loro. Dunque la superficie della sfera descritta dal semicerchio ABDEF è uguale al rettangolo contenuto dal diametro AF, e dalla circonferenza del cerchio che ha per raggio CA. Sicchè la superficie di ogni sfera è uguale ad un rettangolo ec. C. B. D.

COR. Il cerchio essendo uguale a quel triangolo che ha per base la circonferenza di esso cerchio e per altezza il raggio (*prop.* 1. *Arch.*), sarà eziandio uguale al rettangolo, che si contiene dalla circoferenza e dalla metà del di lui raggio. Dunque la superficie della sfera avrà al suo circolo massimo quel medesimo rapporto, che ha

il rettangolo a cui è uguale la superficie sferica, al rettangolo a cui è uguale il circolo massimo. Ma tali rettangoli, per avere la medesima base, sono tra loro come le altezze, vale a dire, come il diametro alla metà del raggio. Dunque la superficie della sfera è quadrupla del suo circolo massimo.

SCOLIO.

Se prendasi il diametro della sfera per raggio, e si descriva un cerchio; questo sarà al circolo massimo della sfera, come il quadrato del diametro al quadrato del raggio, cioè, come 4 a 1. Ma la superficie sferica è anche al suo circolo massimo, come 4 a 1: Dunque

La superficie della sfera è uguale a quel cerchio che ha per raggio il diametro della sfera.

PROP. XVI. TEOR.

La superficie d'ogni segmento sferico è uguale ad un rettangolo contenuto dalla circonferenza d'un cerchio massimo della sfera cui appartiene il segmento, e dall' altezza del segmento medesimo.

Sia ABDE (*fig.* 79.) il semicerchio generatore della sfera; ed ABDF quel semisegmento circola-

re, che girando intorno al diametro AE generi il segmento sferico. Dico la superficie di questo segmento, cioè la superficie descritta dall'arco ABD, essere uguale al rettangolo contenuto dalla circonferenza del cerchio che ha per raggio CA, e dall'altezza AF del segmento sferico.

Imperciocchè, se dividasi l'arco ABD in un numero pari di parti uguali AB, BD, e congiungansi le corde AB, BD, e dal centro C si abbassi sopra la BA la perpendicolare CH; si può dimostrare, come nella proposizione 13, la superficie conica descritta dalle corde AB, BD essere uguale al rettangolo di AF nella circonferenza del cerchio che ha per raggio CH. E dividendo gli archi AB, BD per metà ne' punti M, N; e congiungendo le corde AM, MB, BN, ND, sarà ancor la superficie conica descritta da queste uguale al rettangolo contenuto dall'altezza AF del segmento sferico, e dalla circonferenza del cerchio che ha per raggio la Cc, perpendicolare abbassata dal centro C su la corda BM. Quindi potendosi le superficie di quelle corde avvicinare alla superficie sferica descritta dall'arco ABD, senza però divenirle mai uguali; e potendo la Cc differire dal raggio CA per una quantità minore di qualunque data; saranno limiti delle dette superficie coniche sì la superficie sferica descritta dall'arco ABD, che il rettangolo di FA nella circonferenza del cerchio che ha per raggio CA. Laonde

la superficie sferica descritta dall' arco ABD è uguale al rettangolo contenuto dalla FA, e dalla circonferenza del cerchio che ha per raggio CA. Per la qual cosa la superficie d' ogni segmento sferico è uguale ad un rettangolo ec. C. B. D.

COR. I. Essendo la superficie della sfera uguale al rettangolo del suo diametro nella circonferenza di un circolo massimo; e la superficie del segmento sferico uguale al rettangolo della sua altezza nella circonferenza d' un circolo massimo della sfera a cui appartiene, ne siegue: che la superficie della sfera è alla superficie d'un suo segmento, come il diametro della sfera all' altezza di cotesto segmento sferico.

COR. II. Ed essendo la superficie sferica descritta dall' arco AD (*fig.* 76.) uguale al rettangolo di AP nella circonferenza di CA; e la superficie sferica descritta dall' arco AB uguale al rettangolo di AK nella medesima circonferenza di CA; sarà la superficie della zona sferica, cioè quella descritta dall' arco BD, uguale al rettangolo di PK nella circonferenza del cerchio che ha per raggio CA.

COR. III. Adunque se una sfera sia divisa da più piani perpendicolari ad un suo diametro, la superficie delle zone sferiche ad una o a due basi che si faranno in essa, saranno tra loro come i segmenti di detto diametro, ossia come le altezze delle zone.

SCOLIO.

Dal punto B (*fig.* 80.) della circonferenza del semicerchio ABC generatore di una sfera, si abbassi al diametro AC la perpendicolare BD, e si congiungano le BC, BA. È chiaro essere CA ad AB, come AB ad AD (*cor.prop.* 8. *VI.*); e quindi come CA ad AD, così il quadrato di CA al quadrato di AB. Ma come CA ad AD, così la superficie sferica descritta dalla semicirconferenza ABC alla parte di superficie sferica, che dall' arco AB si descrive; e come il quadrato di AC al quadrato di AB, così il cerchio che ha per raggio AC al cerchio che ha per raggio AB (*prop.* 2. *XII.*). Dunque come la superficie sferica descritta dalla semicirconferenza ABC alla parte di superficie sferica che si descrive dall' arco AB, così il cerchio che ha per raggio AC al cerchio che ha per raggio AB. Ma la prima di queste superficie è uguale al cerchio che ha per raggio AC (*scol. prop.* 15. *Arch.*): dunque eziandio la superficie sferica che dall'arco AB si descrive, sarà uguale al cerchio che ha per raggio la retta AB (*prop.* 14. *V.*): cioè

La superficie convessa d' un segmento sferico è uguale ad un cerchio, il quale ha per raggio la corda dell' arco da cui la detta superficie è descritta: o ciò che è lo stesso, la superficie convessa d' un segmento sferico è

uguale ad un cerchio che ha per raggio la linea retta, la quale unisce il vertice di detto segmento sferico con un punto qualunque della circonferenza della di lui base.

PROP. XVII. TEOR.

Ogni settore sferico pareggia un cono che ha la base uguale alla superficie sferica del settore, e la cui altezza è quanto il raggio di questo solido. E l'intera sfera pareggia un cono che ha la base uguale alla superficie della sfera, e l'altezza al raggio.

Sia ABDC (*fig.* 79.) il settore circolare, il quale con la sua rivoluzione intorno ad AC descriva il settore sferico. Dico un tal settore sferico pareggiare il cono che ha la base uguale alla superficie che si descrive dall' arco ABD, e la cui altezza è quanto il raggio CA.

Si divida l' arco ABD in qualunque numero pari di parti uguali AB, BD, e si congiungano le corde AB, BD, e dal centro C sopra una di queste, poniamo AB, si abbassi la perpendicolare CH. Se intendasi il settore rettilineo ABDC girare intorno ad AC nel medesimo tempo che il settore circolare ABDC, il solido, che da cotesto settore rettilineo si descrive, sarà uguale al cono che ha la base uguale alla superficie descritta dalle corde AB, BD, e

la cui altezza è quanto la perpendicolare CH (*prop.* 14. *Arch.*). E se gli archi AB, BD dividansi per metà ne' punti M, N, e congiungansi le corde AM, MB, BN, ND; e dal centro C sopra una di queste corde, per esempio BM, si abbassi la perpendicolare Cc; il solido, che dalla rivoluzione del settore rettilineo AMBNDC intorno ad AC si descrive, sarà uguale al cono che ha la base uguale alla superficie descritta dalle corde AM, MB, BN, ND, e la cui altezza è quanto la perpendicolare Cc. Or a misura che cotesti archi si seghino per mezzo, e si congiungano con delle linee rette i punti prossimi delle divisioni, ed i così fatti rettilinei si concepiscano girare intorno ad AC, è chiaro, che i solidi da essi descritti si avvicineranno al settore sferico generato dal settor circolare ABDC, senza mai divenirgli uguali; che la superficie conica descritta dalle accennate corde si accosterà alla superficie sferica descritta dall' arco ABD, senza mai pareggiarla; e che finalmente la perpendicolare, la quale dal centro C si abbassa sopra una di coteste corde, differirà dal raggio CA per una quantità minore di qualunque data. Onde non solo il settore sferico, descritto dalla rivoluzione del settore circolare ABDC intorno ad AC, sarà limite degli anzidetti solidi; ma ne sarà ancor limite il cono che ha la base uguale alla superficie sferica descritta dall' arco ABD, e la

cui altezza è quanto il raggio CA. Per la qual cosa essendo i limiti di una medesima grandezza uguali fra loro, il settore sferico generato dalla rivoluzione del settore circolare ABDC intorno ad AC pareggerà il cono, la cui base è uguale alla superficie sferica di cotesto settore, cioè alla superficie descritta dall' arco ABD, e la cui altezza è quanto il raggio CA.

Inoltre, se tutta la circonferenza del semicerchio ABDEF (*fig.* 78.) generatore di una sfera dividasi in un numero pari di parti uguali, per esempio, AB, BD, DE, EF; e congiungansi le corde AB, BD, DE, EF; ed intendasi il semipoligono ABDEF girare insieme col semicerchio ABDEF intorno al diametro AF: si potrà dimostrare con un ragionamento analogo al precedente, la sfera generata dal semicerchio ABDEF esser limite de' solidi inscritti in essa, ed essere ancor limite di questi solidi il cono che ha la base uguale alla superficie descritta dalla semicirconferenza ABDEF, e la cui altezza è quanto il raggio CA. Laonde la sfera generata dal semicerchio ABDEF sarà uguale al cono la cui base è uguale alla superficie di cotesta sfera, e l' altezza al raggio CA. Sicchè ogni settore sferico pareggia ec. C. B. D.

COR. I. Dunque la sfera è ad un suo settore, come la superficie della sfera alla superficie sferica del settore (*prop.* 11. *XII.*). Ma la superficie della sfera è alla superficie sferica del

settore, come il diametro della sfera all'altezza di quel segmento sferico che fa parte del settore (*cor.* 1. *prop.* 16. *Arch.*). Dunque come la sfera è al suo settore, così il diametro della sfera è all'altezza del segmento sferico che fa parte di questo settore.

COR. II. Essendo la superficie della sfera quadrupla d'un suo cerchio massimo (*cor. prop.* 15 *Arch.*), ne siegue esser la sfera quadrupla di quel cono che ha per base un cerchio massimo di detta sfera, e per altezza un di lei raggio.

PROP. XVIII. TEOR.

Ogni segmento sferico pareggia un cono che ha per base il cerchio descritto coll'altezza del segmento, e la cui altezza è la rimanente porzione del diametro accresciuta del raggio della sfera.

Sia ABD (*fig.* 80.) il semisegmento circolare, che girando intorno ad AD descriva il segmento sferico. Dico un tal segmento sferico pareggiare il cono che ha per base il cerchio del raggio AD, e per altezza la DC accresciuta di EA.

Si congiunga il raggio BE, e dal punto B agli estremi A, C si tirino le BA, BC. E poichè il cerchio che ha per raggio la retta AB è uguale alla superficie sferica descritta dall'ar-

co AB (*scol. prop.* 16. *Arch.*), sarà il cono che ha per base il cerchio del raggio AB, e per altezza EA uguale al settore sferico generato dalla rivoluzione del settore circolare ABE intorno ad AE (*prop. prec.*). Ma perchè il quadrato di AB è uguale ai quadrati di BD, e di AD (*prop.* 47. *I.*), anche il cerchio che ha per raggio AB sarà uguale ai cerchi descritti co' rispettivi raggi BD, DA (*prop.* 2. *XII.*): onde il cono che ha per base il cerchio del raggio AB, e per altezza AE, sarà uguale ai due coni che hanno la medesima altezza AE, e le basi de' quali sono rispettivamente il cerchio del raggio BD, e'l cerchio del raggio AD (*prop.* 11. *XII.*). Per la qual cosa il settore sferico, generato dalla rivoluzione del settore circolare ABE intorno ad AE, sarà uguale alla somma de' due coni che hanno per altezza comune la EA, e de' quali uno ha per base il cerchio del raggio BD, e l' altro ha per base il cerchio del raggio AD. Tolgasi di comune il cono descritto dal triangolo BDE intorno a DE; rimarrà il segmento sferico generato dalla rivoluzione del semisegmento circolare ABD intorno ad AD, uguale a due coni, un de' quali ha per base il cerchio del raggio AD e per altezza AE, e l'altro ha per base il cerchio del raggio BD e per altezza DA. Ora essendo, a cagion della perpendicolare BD abbassata sul diametro AC dal vertice B dell' angolo retto ABC,

come CD a DA, così il quadrato di BD al quadrato di AD (*cor. prop.* 8. *VI.*); sarà eziandio come CD a DA, così il cerchio che ha per raggio BD al cerchio che ha per raggio AD: quindi il cono che ha per base il cerchio del raggio BD, e per altezza DA, sarà uguale al cono che ha per base il cerchio del raggio DA, e per altezza DC (*prop.* 15. *XII.*). Laonde il segmento sferico descritto dal semisegmento circolare ABD intorno ad AD, sarà uguale a due coni che hanno per comune base il cerchio del raggio AD, e le altezze de' quali sono rispettivamente DC, ed EA. Ovvero, il segmento sferico descritto dalla rivoluzione del semisegmento circolare ABD intorno ad AD, è uguale al cono solo che ha per base il cerchio del raggio AD, e la cui altezza è la rimanente porzione CD del diametro accresciuta del raggio EA della sfera. Sicchè ogni segmento sferico pareggia ec. C. B. D.

Def. 6. Un cono retto ed un cilindro retto si dicono *equilateri*, se uno de' loro lati è uguale al diametro della loro base.

Se dal vertice di un triangolo equilatero alla base si tiri la perpendicolare, ed intorno a questa si faccia girare il detto triangolo; il solido, che in siffatta rivoluzione si descrive, sarà un cono equilatero.

E se pe' punti medii di due lati opposti di un quadrato si lasci passare una linea retta, ed in-

torno a questa si faccia girare il detto quadrato, il solido, che in siffatta rivoluzine si descrive, sarà un cilindro equilatero.

Def. 7. Tre grandezze sono in *proporzione armonica*, se la massima di esse stia alla minima, come l'eccesso della massima sulla media all'eccesso di questa sulla minima.

I numeri 6, 4, 3 sono in tale relazione; perciocchè stà 6 : 3 : : 6-4 : 4-3 : : (2 : 1).

PROP. XIX. TEOR.

Il cilindro sta alla sfera cui è circoscritto, in ragion sesquialtera, cioè come 3 a 2; e la superficie intera di questo cilindro è alla superficie sferica nel medesimo rapporto.

Perciocchè la base del cilindro circoscritto è uguale ad un cerchio massimo, e l'altezza al diametro della sfera; sarà un tal cilindro triplo del cono che ha per base il detto cerchio massimo, e per altezza il diametro della sfera (*prop.* 10. *XII.*); e quindi sestuplo del cono che ha per base il cerchio massimo, e per altezza il raggio della sfera. Ma di questo medesimo cono è quadrupla la sfera (*cor.* 2. *prop.* 17. *Arc.*): dunque il cilindro circoscritto alla sfera è alla sfera, come 6 a 4, ossia come 3 a 2.

In secondo luogo, essendo la superficie convessa del cilindro ad una delle sue basi, come

il doppio lato del cilindro al raggio della base (*prop.* 3. *Arch.*) ; sarà la superficie convessa del cilindro circoscritto alla sfera quadrupla della sua base ; cioè quadrupla d'un cerchio massimo della sfera : onde, aggiuntevi le due basi, l'intera superficie del cilindro circoscritto sarà sestupla d'un cerchio massimo della sfera. Ma di questo medesimo cerchio è quadrupla la superficie sferica (*cor. prop.* 15. *Arch.*): dunque la superficie intera del cilindro circoscritto alla sfera è alla superficie sferica, come 6 a 4, ossia come 3 a 2. C. B. D. (*).

COR. Essendo la sfera due terzi del cilindro circoscrittole, se da questo quella si tolga, il concavo sfero-cilindrico che rimane sarà un terzo del detto cilindro ; e perciò uguale al cono che ha per base il cerchio massimo, e per altezza il diametro della sfera.

(*) Il grande Archimede si compiacque tanto del rapporto sesquialtero che il cilindro circoscritto alla sfera serba a questa, sì per rispetto alla solidità come per rispetto alla superficie intera, che volle ne fosse scolpita la figura sulla sua tomba. E Cicerone, essendo questore in Sicilia, mentre con premura ne cercava il sepolcro, a questo segno lo riconobbe fra i rovi e le spine, e lo mostrò ai di lui compatriotti.

PROP. XX. TEOR.

La sfera è al cilindro equilatero inscritto in essa, come la quadrupla diagonale di un quadrato al triplo suo lato; ma la superficie sferica è alla superficie intera di detto cilindro, come 4 a 3.

Rappresenti DPHEKQ (*fig.* 81.) un cerchio massimo della sfera, e PHKQ il quadrato inscritto in esso; dalla cui rivoluzione intorno al diametro DE, perpendicolare a ciascuna delle PQ ed HK, si generi il cilindro equilatero inscritto nella sfera; e si congiungano i raggi CQ, CH.

Per la perfetta uguaglianza de' triangoli CMQ, CNH (*prop.* 4. *I.*) sarà l'angolo MCQ uguale all'angolo HCN; onde la HC è per dritto alla CQ. E poichè il quadrato di HQ è uguale ai quadrati di HK e di KQ (*prop.* 47. *I.*), ed è il quadrato di HK uguale al quadrato di KQ; sarà dunque il quadrato di HQ doppio del quadrato di HK: e perciò il cerchio che ha per diametro HQ, cioè il cerchio massimo della sfera, è doppio del cerchio che ha per diametro HK, vale a dire, della base del cilindro inscritto (*prop.* 2. *XII.*). Per la qual cosa essendo questo cilindro uguale al cono che ha per base il cerchio del raggio HN e per altezza la tripla HP

(*prop.* 10. *XII.*), sarà eziandio uguale al cono che ha per base il cerchio del raggio CH, e per altezza tre metà di HP. Ma la sfera generata dal semicerchio DPHE intorno a DE è uguale al cono che ha per base il cerchio di CH, e per altezza la doppia HQ; ed i coni che hanno la medesima base, sono tra loro come le altezze (*prop.* 14. *XII.*). Dunque la sfera è al cilindro inscritto, come il duplo di HQ a tre metà di HP, ovvero, duplicando i termini di questa ragione, come la quadrupla diagonale del quadrato al triplo suo lato.

Inoltre, essendo la superficie convessa del cilindro equilatero inscritto nella sfera quadrupla della sua base (*prop.* 3. *Arch.*); sarà la superficie intera di un tal cilindro sestupla di una delle sue basi, e quindi tripla del cerchio massimo della sfera. Imperciocchè si è dianzi dimostrato essere la base del cilindro inscritto nella sfera metà del cerchio massimo di questa. Ma la superficie sferica è quadrupla del suo cerchio massimo: dunque la superficie della sfera è alla superficie intera del cilindro inscritto, come 4 a 3. C. B. D.

COR. I. Essendo il cilindro alla sfera cui è circoscritto, come 3 a 2; e la sfera al cilindro inscritto, come quattro diagonali di un quadrato a tre suoi lati; sarà il cilindro circoscritto al cilindro inscritto, in ragion composta di 3 a 2 e di quattro diagonali di un quadrato a tre

suoi lati, cioè, come 12 diagonali di un quadrato a 6 lati: ovvero, dividendo per 12 i termini di questa ragione, come la diagonale di un quadrato alla metà del suo lato.

COR. II. E dunque incommensurabile sì il rapporto della sfera al cilindro inscritto, che il rapporto di questo al cilindro circoscritto: ma non è così delle loro superficie.

COR. III. Imperciocchè essendo la superficie intera del cilindro circoscritto alla superficie della sfera, come 6 a 4 (*prop.* 19. *Arch.*); e la superficie sferica alla superficie intera del cilindro inscritto, come 4 a 3, ne siegue, che, se ad una medesima sfera si circoscriva un cilindro equilatero ed un altro se ne inscriva, la superficie intera del cilindro circoscritto, la superficie sferica e la superficie intera del cilindro inscritto sono tra loro, come i numeri 6, 4, 3; cioè in proporzione armonica.

PROP. XXI. TEOR.

Il cono equilatero è alla sfera cui è circoscritto nella ragione di 9 a 4; e la superficie intera di detto cono e la superficie sferica hanno tra loro il medesimo rapporto.

Rappresenti FMEN (*fig.* 82.) un cerchio massimo della sfera, ed ABD sia un triangolo equilatero circoscritto a questo cerchio. La linea retta AC, la quale unisce il vertice A del triangolo BAD

e'l centro C del cerchio, prolungata incontrerà la BD nel punto E del contatto, e le sarà perpendicolare. Imperciocchè, congiunti i raggi CM, CN, saranno perfettamente uguali i triangoli MAC, NAC, come quelli che hanno le condizioni della prop. 4. El. I., e quindi l' angolo MAC è uguale all' angolo CAN. Per la qual cosa essendo i due lati BA, AE del triangolo BAE uguali a' due lati DA, AE del triangolo DAE, ciascuno a ciascuno, e contenendo gli angoli uguali BAE, DAE, sarà l' angolo AEB uguale all' angolo AED. Dunque la linea retta AE è perpendicolare alla BD, e quindi l' incontro loro esser dee nel punto E del contatto (*prop.* 18. *III.*). Il triangolo dunque ABD girando intorno ad AE nel medesimo tempo che il semicerchio FME, descriverà intorno alla sfera un cono equilatero.

E poiche BE è metà di BA, sarà il quadrato di BE quarta parte del quadrato di BA. Ma il quadrato di BA è uguale ai quadrati di AE, e di BE (*prop.* 47. *I.*): dunque il quadrato di AE è tre quarti del quadrato di BA. Onde il quadrato di BE sarà un terzo del quadrato di AE, ed il cerchio del raggio BE eziandio un terzo del cerchio che ha per raggio AE (*prop.* 2. *XII.*). Ma perchè AE è uguale al triplo raggio CE, sarà il cerchio del raggio AE nonuplo del cerchio che ha per raggio CE, cioè nonuplo d'un cerchio massimo della sfera; ma il cerchio di

BE è un terzo del cerchio di AE: dunque il cerchio di BE, che serve di base al cono circoscritto, è triplo d'un cerchio massimo della sfera. Il perchè essendo la base del cono circoscritto tripla d'un cerchio massimo della sfera, e l'altezza di quello tripla del raggio di questa; sarà il detto cono circoscritto nonuplo del cono che ha per base il cerchio massimo, e per altezza il raggio della sfera (potendosi facilmente provare coll'aiuto delle prop. 11. e 14 del XII. lib. che i coni sono tra loro in ragion composta delle basi e delle altezze). Ma di questo medesimo cono è quadrupla la sfera (*cor.* 2. *prop.* 17. *Arch*): dunque il cono equilatero è alla sfera cui è circoscritto, nella ragione di 9 a 4.

In secondo luogo, la superficie convessa del cono circoscritto è doppia della sua base (*prop.* 5. *Arch.*); ma la base di questo cono è tripla d'un cerchio massimo della sfera: dunque la detta superficie convessa è sestupla di un cerchio massimo della sfera; del quale ne sarà in conseguenza nonupla la superficie intera del detto cono. Ma la superficie della sfera è quadrupla d'un suo cerchio massimo: dunque la superficie intera del cono equilatero circoscritto alla sfera è alla superficie sferica, come 9 a 4. (*). C. B. D.

(*) Che l'altezza del triangolo equilatero sia tripla del raggio del cerchio a cui è circoscritto, è una ve-

COR. Dal presente teorema, e da quel che si è dimostrato nella prop. 19. si rileva, che, se ad una medesima sfera si circoscrivano un cono ed un cilindro equilateri, questi tre corpi rotondi, cioè il cono, il cilindro e la sfera sono tra loro, come i numeri 9, 6, 4, vale a dire, in una continua ragione sesquialtera, sì per le loro solidità che per le loro superficie intere.

---

rità che deriva immediatamente da una nota proprietà del triangolo suddetto: cioè, se da un punto preso entro un triangolo equilatero si abbassino su i lati di questo le respettive perpendicolari, la somma loro sarà uguale all'altezza del triangolo. Ed in vero, dal punto E (*fig.* 83.) preso entro il triangolo equilatero ABC si abbassino su i lati AB, BC, CA le perpendicolari EG, EF, EH; e si congiungano le AE, BE, CE. I triangoli ABE, BEC, CEA avendo uguali le basi, saranno insieme presi uguali a quel triangolo che ha per base la loro base comune, e per altezza la somma delle loro altezze. Ma il triangolo ABC è uguale ai triangoli ABE, BEC, CEA, ed ha per base la loro comune base BC. Dunque l'altezza AD del triangolo ABC è uguale alla somma delle tre perpendicolari EG, EF, EH. Le quali, nel caso nostro (*fig.* 82.), sono appunto i tre raggi CM, CE, CN del cerchio MEN.

PROP. XXII. TEOR.

La sfera è al cono equilatero inscritto in essa, come 32 a 9; e la superficie sferica è alla superficie intera di detto cono, come 16 a 9.

Rappresenti MEN (*fig.* 82.) un cerchio massimo della sfera; ed FGH sia il triangolo equilatero inscritto in esso, dalla cui rivoluzione intorno al diametro FE, perpendicolare alla base GH del detto triangolo, si generi il cono equilatero inscritto nella sfera; e si congiunga il raggio CG.

E poichè il quadrato di GK è uguale al rettangolo EKF, e l'quadrato di FG è uguale al rettangolo EFK (*cor. prop.* 8. *VI.*); sarà il rettangolo EKF quarta parte del rettangolo EFK, siccome il quadrato di GK è quarta parte del quadrato di FG. Ma il rettangolo EHF sta al rettangolo EFK come EK ad EF (*prop.* 1. *VI.*): adunque EK è quarta parte di EF. Il lato dunque del triangolo equilatero taglia dal diametro FE la quarta parte KE. Ciò premesso, il quadrato di CG è uguale ai quadrati di GK e di KC (*prop.* 47. *I.*); ma il quadrato di KC è quarta parte del quadrato di CG: dunque il quadrato di GK è tre quarte parti del quadrato di CG. Laonde il cerchio di GK, che serve di base al cono inscritto nella sfera, è tre quarti del cerchio massimo della medesima sfera.

Ma l'altezza FK di questo cono è ancor tre quarti del diametro, ovvero sei quarti del raggio; dunque il cono inscritto nella sfera è al cono che ha per base il cerchio massimo e per altezza il raggio della sfera, come $\frac{18}{16}$ a 1. Ma la sfera è al cono che ha per base il cerchio massimo e per altezza il di lei raggio, come 4 a 1 (*cor.2.prop.17.Arch.*). Laonde la sfera è al cono equilatero inscritto in essa, come 4 a $\frac{18}{16}$, o come 4 a $\frac{9}{8}$, o finalmente, moltiplicando per 8 i termini di questa ragione, come 32 a 9.

Inoltre, la superficie convessa del cono equilatero inscritto è dupla della sua base; ma questa, come si è dimostrato, è tre quarti del cerchio massimo della sfera: dunque la detta superficie intera del cono inscritto sarà nove quarti del cerchio massimo della sfera. Ma la superficie sferica è quadrupla del suo cerchio massimo (*scol. prop.* 15.*Arch.*): dunque la superficie della sfera è alla superficie intera del cono equilatero inscritto, come 4 a $\frac{9}{4}$, ovvero, moltiplicando per 4 i termini di questa ragione, come 16 a 9.

COR. I. Essendo il cono equilatero alla sfera cui è circoscritto, come 9 a 4 (*prop.* 21. *Arch.*), ovvero, come 72 a 32; e la sfera essendo al cono equilatero inscritto, come 32 a 9; sarà *ex aequo* il cono equilatero circoscritto al cono equilatero inscritto in una medesima sfera, come 72 a 9, ovvero, dividendo per 9 i termini di questa ragione, come 8 a 1.

COR. II. Ed essendo la superficie intera del cono equilatero alla superficie della sfera cui è circoscritto, come 9 a 4, ovvero come 36 a 16; e la superficie della sfera alla superficie del cono equilatero inscritto, come 16 a 9, ne siegue:

Che, se ad una medesima sfera si circoscriva un cono equilatero ed un altro se ne inscriva, le superficie intere di questi tre corpi, cioè la superficie intera del cono circoscritto, la superficie sferica e la superficie intera del cono inscritto sono tra loro, come i numeri 36, 16, 9; i quali sono i quadrati de' numeri 6, 4, 3 che costituiscono una proporzione armonica, ed esprimono le relazioni che hanno tra loro la superficie intera del cilindro circoscritto alla sfera, la superficie sferica e la superficie intera del cilindro inscritto nella medesima sfera (*cor.* 3. *prop.* 20. *Arch.*).

FINE DE' TEOREMI SCELTI DI ARCHIMEDE.

AL LETTORE.

Il problema della quadratura del cerchio dipende della conoscenza del rapporto che la circonferenza serba al raggio o al diametro. Imperocchè per mezzo di un tal rapporto si potrebbe rinvenire la circonferenza, il raggio essendo noto; è 'l cerchio, che è uguale al rettangolo della circonferenza nella metà del raggio, sarebbe uguale al quadrato della media proporzionale tra le due dimensioni di questo rettangolo. Ma il rapporto della circonferenza al raggio o al diametro non si è potuto finora determinare che di una maniera prossima alla vera. Per altro l' approssimazione si è spinta così lungi, che il rapporto esatto non avrebbe sul prossimo un reale vantaggio.

Archimide *il primo ha provato che il rapporto della circonferenza al diametro è compreso fra* $3\frac{10}{70}$ *e* $3\frac{10}{71}$; *quindi il numero* $3\frac{1}{7}$ *ovvero* $\frac{22}{7}$ *esprime diggià un valore molto prossimo al vero, e che è molto in uso per la sua semplicità. Mezio con una maggiore approssimazione rinvenne pel medesimo rapporto il numero* $\frac{355}{113}$. *Finalmente altri calcolatori, sviluppandolo fino ad un certo ordine di deci-*

mali, *hanno trovato* 3, 14159265358 *ec.*; *ed hanno avuto la pazienza di prolungarlo sino alla cento-ventisettesima*, *ed anche sino alla cento-quarantesima cifra. Egli è evidente che una tale approssimazione equivale alla verità.*

Per queste approssimazioni noi ci valeremo del metodo di Giacomo Grecory, *che senza dubbio fra i metodi elementari è uno de' più semplici.*

DELLA

MISURA DEL CERCHIO.

DEFINIZIONI.

1. Una linea curva è *rettificabile*, qualora con mezzi geometrici si può assegnare una linea retta uguale in lunghezza alla curva di cui si tratta. Ma si dirà *rettificata* per approssimazione, qualora la linea retta che si assegna, differisce per una quantità infinitamente picciola dalla lunghezza della curva.

2. Una figura curvilinea è *quadrabile*, qualora si può assegnare un rettilineo uguale alla figura curvilinea di cui si tratta. Ma quando si assegna un rettilineo la cui superficie differisce per una quantità infinitamente picciola dalla figura curvilinea, questa si dirà *quadrata* per approssimazione.

LEMMA I.

Ogni poligono regolare inscritto nel cerchio è medio proporzionale tra due poligoni, dei quali uno è parimente inscritto nel cerchio ed ha la metà del numero de' lati, l'altro è circoscritto ed è simile a questo.

Sia AB (*fig.* 84.) il lato di un poligono regolare inscritto nel cerchio cui appartiene l'arco ABD, e 'l cui centro sia C. Si congiunga il raggio CB, e su di esso si abbassi dal punto A la perpendicolare AH, la quale si prolunghi, fino a che incontri l'arco ABD nel punto D. Finalmente si meni per B la tangente EBF al cerchio; ed i raggi CA, CD si distendano, finchè la incontrino ne' punti E, F. È chiaro che il poligono del lato AD è inscritto nel cerchio, ed ha la metà del numero de' lati per rispetto al poligono del lato AB; ed è chiaro ancora che il poligono del lato EF è circoscritto al cerchio, ed è simile al poligono che ha per lato AD.

Ciò premesso, il poligono del lato AD è tanto multiplice del triangolo ACH, quanto il poligono del lato AB è multiplice del triangolo ABC, e quanto il poligono del lato EF è multiplice del triangolo ECB. Ma il triangolo ACH è al triangolo ACB, come CH a CB (*prop.* 1. *El. VI.*), ovvero, come CA a CE, per essere simili i trian-

goli ACH, ECB; ed è poi come CA a CE, così il triangolo ACB al triangolo ECB (*prop.* 1. *El. VI.*). Dunque come il triangolo ACH al triangolo ACB, così il triangolo ACB al triangolo ECB. Ma le parti hanno tra loro la medesima ragione che i loro ugualmente multiplici (*prop.* 15. *V.*); dunque benanche il poligono del lato AD è al poligono del lato AB, come il poligono del lato AB al poligono del lato EF. Sicchè ogni poligono regolare inscritto ec. C. B. D.

LEMMA II.

Ogni poligono regolare circoscritto al cerchio è quarto proporzionale in ordine alla somma di un poligono inscritto simile ad esso e di un poligono inscritto che ha la metà del numero de' lati, al doppio di questo poligono, e ad un poligono circoscritto simile a questo medesimo.

S'intenda fatta la medesima costruzione (*fig.*85.) del lemma precedente, e dai punti A, D si tirino al cerchio le tangenti AK, DG; e si congiunga la CK. Il poligono del lato KG sarà circoscritto al cerchio, e simile al poligono che ha per lato AB.

I triangoli ACK, BCK avendo tre lati uguali a tre lati, ciascuno a ciascuno, avranno ancora uguali gli angoli ACK, BCK (*prop.* 8. *El. I.*);

e perciò come EC a CB o alla sua uguale CA, così EK a BK (*prop.* 3. *El. VI.*). Ma come EC a CA, così il triangolo ECB al triangolo ACB (*prop.* 1. *El. VI.*), ovvero per lo lemma prec., così il triangolo ACB al triangolo ACH; e come EK a KB, così il triangolo ECK al triangolo KCB (*prop.* 1. *El. VI.*). Adunque come il triangolo ACB al triangolo ACH, così il triangolo ECK al triangolo KCB. E componendo, sarà come il triangolo ACB insieme col triangolo ACH al triangolo ACH, così il triangolo ECB al triangolo KCB. Ma il triangolo ACH è al suo doppio ACD, come il triangolo KCB al suo doppio KCG: dunque, per egualità, come il triangolo ABC insieme col triangolo ACH è al triangolo ACD, così il triangolo ECB al triangolo KCG. Or il poligono del lato AB insieme col poligono del lato AD è tanto multiplice del triangolo ACB e del triangolo ACH, quanto il doppio poligono del lato AD è multiplice del triangolo ACD; e similmente il poligono del lato EF è tanto multiplice del triangolo ECB, quanto il poligono del lato KG è multiplice del triangolo KCG. Per la qual cosa dovendo essere gli ugualmente multiplici proporzionali, come lo sono le parti loro (*prop.* 18. *V.*), sarà il poligono del lato AB insieme col poligono del lato AD al doppio poligono del lato AD, come il poligono del lato EF al poligono del lato KG. Sicchè ogni poligono regolare circoscritto ec. C. B. D.

PROBLEMA.

Ritrovare il rapporto prossimo della circonferenza al diametro.

Si ponga il raggio del cerchio uguale a 1, sarà uguale a 1 il di lui quadrato; il quadrato inscritto sarà 2, e'l quadrato circoscritto 4. Si ritrovi il medio proporzionale fra il quadrato inscritto e'l circoscritto, cioè estraendo la radice quadrata da 8; si avrà 2, 8284271, che, giusta il lemma I., sarà l'ottagono inscritto. In ordine alla somma di 2, 8284271 e 2, al doppio del quadrato inscritto 2, ed al quadrato circoscritto 4 si trovi il quarto proporzionale, che è 3, 3137085; si otterrà in tal modo, giusta il lemma II., l'ottagono circoscritto. Tra l'ottagono inscritto 2, 8284271 e l'ottagono circoscritto 3, 3137085 si ritrovi il medio proporzionale 3, 0614674; si avrà la figura di sedici lati inscritta. E se in ordine alla somma della figura di sedici lati inscritta e l'ottagono inscritto, al doppio di questo, ad all'ottagono circoscritto si ritrovi il quarto proporzionale 3, 1825979; si otterrà la figura di sedici lati circoscritta. In seguito questi poligoni di 16 lati serviranno a conoscere quelli di 32; e si continuerà così, finchè il calcolo non dia più differenza tra i poligoni inscritto e circoscritto, almeno sino ad

una certa cifra decimale, che è la settima in questo esempio. Arrivato a questo punto si conchiuderà che il cerchio è uguale ad uno di siffatti poligoni; perciocchè il cerchio è sempre compreso tra il poligono inscritto ed il poligono circoscritto: dunque se questi non differiscono tra loro sino ad una certa cifra decimale, il cerchio non vi differirà tampoco sino alla medesima cifra.

Ecco il calcolo di questi poligoni continuato in modo, che non differiscano più tra loro sino alle parti dieci-milionesime.

Numero di lati.	Poligono inscritto.	Poligono circoscritto.
4	2, 0000000 ..	4, 0000000
8	2, 8284271 ..	3, 3137085
16	3, 0614674 ..	3, 1825979
32	3, 1214451 ..	3, 1517249
64	3, 1365485 ..	3, 1441184
128	3, 1403311 ..	3, 1422236
256	3, 1412772 ..	3, 1417504
512	3, 1415138 ..	3, 1416321
1024	3, 1415729 ..	3, 1416025
2048	3, 1415877 ..	3, 1415951
4096	3, 1415914 ..	3, 1415933
8192	3, 1415923 ..	3, 1415928
16384	3, 1415925 ..	3, 1415927
32768	3, 1415926 ..	3, 1415926

Il cerchio dunque con un' approsimazione minore di una dieci-milionesima è uguale a

3,1415926 del quadrato del raggio, il quale nel nostro esempio, si è posto uguale a 1. Poichè il cerchio è uguale al triangolo che ha per base la circonferenza e per altezza il raggio, e per conseguenza uguale al rettangolo fatto dalla semicirconferenza e dal raggio; il raggio essendo 1, la semicirconferenza è 3, 1415926; ovvero il diametro essendo 1, la circonferenza è 3, 1415926. Sicchè il rapporto prossimo della circonferenza al diametro è 3, 1415926 a 1.

SCOLIO.

I cerchi essendo tra loro come i quadrati de' raggi, sarà come 1 a 3, 1415926, così il quadrato di un raggio qualunque al cerchio che gli corrisponde. La superficie dunque di ogni cerchio si avrà moltiplicando il quadrato del di lui raggragio pel numero 3, 1415926.

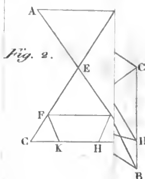
Similmente, le circonferenze de' cerchi essendo tra loro come i raggi, ovvero come i diametri, sarà come 1 a 3, 1415926, così un diametro qualunque alla circonferenza che gli corrisponde. La circonferenza dunque di ogni cerchio si ottiene moltiplicando il di lui diametro pel numero 3, 1415926.

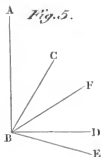
Finalmente, i cerchi essendo tra loro come i quadrati de' diametri, permutando, sarà un cerchio al quadrato del suo diametro, come è al quadrato del suo diametro il cerchio, il cui

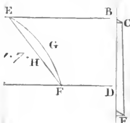
raggio si è posto uguale a 1; ma il raggio essendo 1, il cerchio è al quadrato del suo diametro, come 3, 1415926 a 4, 0000000. Dunque ogni altro cerchio è al quadrato del suo diametro nel medesimo rapporto.

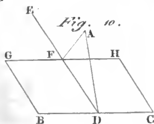
FINE DELLA MISURA DEL CERCHIO.

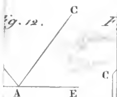


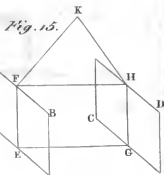

A
Fig. 2.
E
C
F
C
K
H
H
B

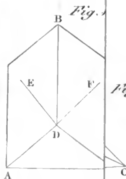

A
Fig. 5.
C
F
B
D
E

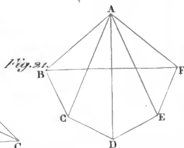

E
B
C
G
H
F
D
F


E
Fig. 10.
A
G
F
H
B
D
C

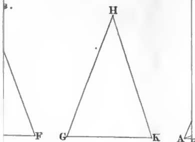

C
A
E


K
Fig. 15.
F
H
D
B
C
A
E
G

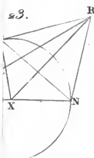

B
E
F
D
A
C

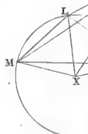

A
Fig. 21.
B
F
C
E
D

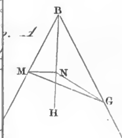
Catanee inc.

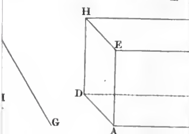

H
F
G
K
A
F

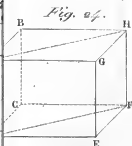

H
G
K

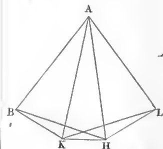

23.
R
X
N

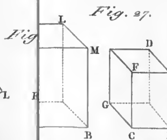

L
M
X


B
M
N
G
H


H
E
D
A
G


Fig. 24.
B
H
G
C
F
E


A
B
L
K
H


Fig. 27.
L
M
B
D
F
G
C
E

Cataneo inc.

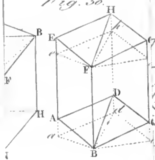


Fig. 35.

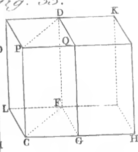
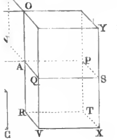
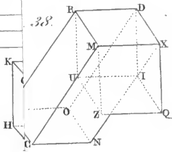
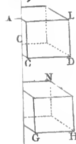


Fig. prop. D

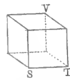




41.

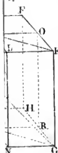


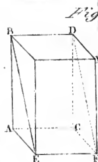




D
F
N

Bataneo inc.





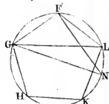
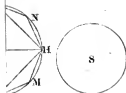
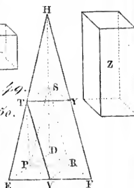
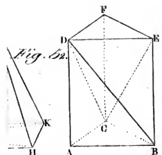
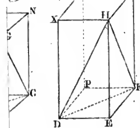


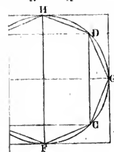
Fig. 47.

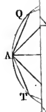


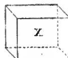


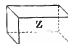




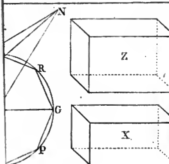


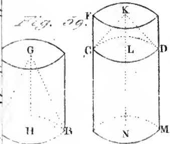


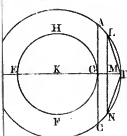


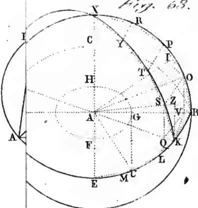


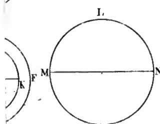
Catanco inc.

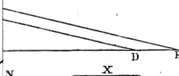


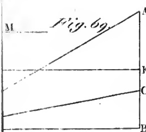


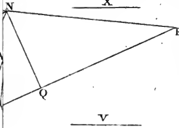












Cattaneo inc.





